Fiche méthodologique n° 17

Calculer des probabilités finies

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini.

1 Utiliser une situation d'équiprobabilité

Si chaque événement élémentaire a la même probabilité de se produire, autrement dit si tous les résultats de l'expérience aléatoire sont équiprobables, alors P est la probabilité uniforme et pour tout couple d'événements A, B tel que $P(B) \neq 0$, on a :

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}} \quad \text{et} \quad \boxed{P_B(A) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)}}.$$

Calculer des probabilités ou des probabilités conditionnelles dans une situation d'équiprobabilité revient donc à faire du dénombrement.

Exercice d'application 1
Calculer la probabilité d'obtenir exactement trois faces identiques en lançant cinq dés équilibrés à 6 faces.

Exercice d'application 2
Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux cœurs en tirant une main de cinq cartes dans un jeu de 32 cartes sachant que la main obtenue ne contient aucun roi.

2 Calculer la probabilité d'une union

2.1 Cas d'événements deux à deux incompatibles

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des événements deux à deux incompatibles alors la probabilité de l'union est égale à la somme des probabilités :

$$\left(\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset\right) \Longrightarrow \boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)}.$$

Exercice d'application 3
Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux piques en tirant une main de cinq cartes dans un jeu de 32 cartes.

Exercice d'application 4
Calculer la probabilité d'obtenir au moins trois faces identiques en lançant cinq dés équilibrés à 6 faces sachant que les faces obtenues n'ont donné aucun 1.

2.2 Cas général

Soient A et B deux événements. Alors :

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}.$$

Exercice d'application 5
Dans une course hippique de 12 partants, un pari propose de miser sur trois chevaux ordonnés afin de trouver les trois premiers chevaux sans notion d'ordre ou trois chevaux parmi les cinq premiers en précisant l'ordre. Calculer la probabilité de gagner ce pari.

Exercice d'application 6
On considère un sac contenant des boules de couleurs : 1 bleue, 2 jaunes, 3 rouges et 4 vertes. On tire cinq fois de suite une boule du sac avec remise entre chaque tirage. Calculer la probabilité qu'au moins une couleur n'ait pas été tirée.

3 Calculer la probabilité d'une intersection

3.1 Cas d'événements mutuellement indépendants

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des événements mutuellement indépendants, alors :

$$\boxed{P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)}.$$

Exercice d'application 7
On effectue plusieurs lancers consécutifs d'une pièce déséquilibrée qui donne «pile» avec la probabilité $p \in [0,1]$ et on s'arrête la première fois qu'on obtient «face». Calculer la probabilité de s'arrêter juste après le n-ième lancer où $n \in \mathbb{N}^\star$.

3.2 Cas général

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des événements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors la probabilité de l'intersection est donnée par la formule des probabilités composées :

$$\boxed{P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)}.$$

Remarque : on peut également utiliser un arbre de probabilités en notant sur chaque branche (correspondant à chaque cas possible) sa probabilité conditionnelle (sachant les cas correspondants aux branches précédentes) puis on multiplie toutes les probabilités sur le trajet de branches menant au cas considéré.

Exercice d'application 8
On considère un sac contenant des boules de couleurs : 1 bleue, 2 jaunes, 3 rouges et 4 vertes. On tire quatre fois de suite une boule du sac sans remise entre chaque tirage et avec les règles suivantes :

— si on pioche une bleue, on rajoute une jaune ;
— si on pioche une jaune, on rajoute une rouge ;
— si on pioche une rouge, on rajoute une verte ;
— si on pioche une verte, on rajoute une bleue.

Calculer la probabilité de tirer les couleurs vert, rouge, jaune et bleu dans cet ordre.

Exercice d'application 9
On dispose de deux pièces déséquilibrées qui donnent «pile» avec les probabilités $(p_1, p_2) \in [0,1]^2$. On effectue 42 lancers consécutifs d'une des deux pièces en commençant par la première et en changeant de pièce à chaque fois qu'on obtient «pile». Calculer la probabilité d'obtenir pour la première fois deux résultats identiques consécutifs aux 41-ème et 42-ième lancers.

4 Utiliser un système complet d'événements

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un système complet d'événements. Pour calculer la probabilité d'un événement B, on peut alors utiliser la formule des probabilités totales :

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(B)}.$$

Exercice d'application 10
Une usine fabrique des dés à 6 faces dont seuls 90% sont équilibrés, les 10% restants donnent 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$. On lance deux dés à la sortie de l'usine. Calculer la probabilité d'obtenir un double 1.

Exercice d'application 11
On considère 42 sacs numérotés de 1 à 42 tels que le sac n° k contient k boules blanches et $42 - k$ boules noires. On choisit un sac au hasard puis on tire une boule de ce sac. Calculer la probabilité de tirer une boule noire.

5 Calculer la probabilité d'une cause

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un système complet d'événements vu comme les différents résultats d'une étape intermédiaire de l'expérience aléatoire. Soit B un événement vu comme le résultat final de l'expérience aléatoire. Pour calculer la probabilité $P_B(A_k)$ que l'événement A_k ait causé la conséquence B, on utilise la formule de Bayes :

$$\boxed{P_B(A_k) = \frac{P(A_k) P_{A_k}(B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(B)}}.$$

Exercice d'application 12
On considère quatre sacs contenant des boules de couleurs :

— le premier contient 1 bleue, 2 jaunes, 3 rouges et 4 vertes ;
— le deuxième contient 1 jaune, 2 rouges, 3 vertes et 4 bleues ;
— le troisième contient 1 rouge, 2 vertes, 3 bleues et 4 jaunes ;
— le quatrième contient 1 verte, 2 bleues, 3 jaunes et 4 rouges.

On choisit un sac au hasard puis on tire une boule. Calculer la probabilité d'avoir tiré dans le premier sac sachant que la boule tirée est verte.

Exercice d'application 13
Une usine fabrique des dés à 6 faces dont seuls 90% sont équilibrés, les 10% restants donnent 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$. On lance un dé à la sortie de l'usine et on obtient 1. Calculer la probabilité que ce dé ne soit pas équilibré.

Exercice d'application 14
Un laboratoire conçoit un test d'infection virale qui est efficace à 99%, c'est-à-dire que le résultat du test est positif à 99% si le sujet est infecté et négatif à 99% si le sujet est sain. Sachant que 2% de la population est infectée par le virus, calculer la probabilité d'être réellement infecté si le résultat du test est positif.