Fiche méthodologique n° 2

Résoudre des équations et des inéquations

1 Résoudre une équation

Résoudre une équation c'est déterminer l'ensemble des solutions, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de l'inconnue pour lesquelles l'égalité entre les deux membres de l'équation est vraie. Les difficultés sont de ne pas oublier de solutions et d'être assuré que les valeurs obtenues sont bien des solutions. Quelques techniques classiques :

- Commencer par déterminer les valeurs de l'inconnue pour lesquelles l'équation est bien définie, c'est-à-dire déterminer l'intersection des domaines de définition des fonctions qui apparaissent dans l'équation.
- Raisonner par disjonction de cas s'il existe une partition de l'ensemble de définition de l'équation en sous-ensembles sur chacun desquels l'équation se simplifie (exemples types : l'équation comporte des valeurs absolues, un paramètre, etc.).
- Simplifier autant que possible chaque membre de l'équation en utilisant les propriétés des fonctions usuelles.
- Raisonner par disjonction de cas lorsqu'on simplifie en multipliant (ou divisant) les deux membres de l'équation par une même quantité dépendant de l'inconnue et pouvant s'annuler.
- Essayer de se ramener à une équation ayant un second membre nul, puis factoriser le premier membre afin de se ramener aux équations plus simples où chaque facteur est nul.
- Au besoin, faire un changement d'inconnue pour se ramener à une équation plus simple, résoudre cette nouvelle équation et revenir à l'inconnue initiale.

Il existe deux types de raisonnement pour résoudre une équation.

1.1 Par équivalences

On raisonne par équivalences entre chaque étape de simplification de l'équation.

- *Avantages* : rapide, concis, élégant.
- *Inconvénients* : source d'erreurs, nombreux pièges.

Exemple 1
Résoudre l'équation $\sqrt{x+2} = x-4$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Solution. L'équation est bien définie pour $x+2 \geqslant 0$, c'est-à-dire pour $x \in [-2,+\infty[$.

On a pour tout $x \in [-2,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+2} = x-4 &\iff x+2 = (x-4)^2 \text{ et } x-4 \geqslant 0\\
&\iff x^2-9x+14 = 0 \text{ et } x \geqslant 4\\
&\iff (x-2)(x-7) = 0 \text{ et } x \geqslant 4\\
&\iff (x = 2 \text{ ou } x = 7) \text{ et } x \geqslant 4\\
&\iff x = 7.
\end{aligned}$$

Donc l'équation admet une seule solution : $x = 7$. □

Exemple 2
Résoudre l'équation $|3x+6| = 2x-1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Solution. L'équation est bien définie pour $x \in \mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
|3x+6| = 2x-1 &\iff (3x+6 = 2x-1 \text{ et } 3x+6 \geqslant 0)\\
&\qquad\qquad \text{ou } (-(3x+6) = 2x-1 \text{ et } 3x+6 \leqslant 0)\\
&\iff (x = -7 \text{ et } x \geqslant -2) \text{ ou } (x = -1 \text{ et } x \leqslant -2)\\
&\iff x \in \emptyset.
\end{aligned}$$

Donc l'équation n'admet pas de solution. □

Exemple 3
Résoudre l'équation $e^x - 10e^{-x} = 3$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Solution. L'équation est bien définie pour $x \in \mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
e^x - 10e^{-x} = 3 &\iff e^{2x} - 3e^x - 10 = 0\\
&\iff X^2 - 3X - 10 = 0 \quad \text{en posant } X = e^x\\
&\iff (X-5)(X+2) = 0\\
&\iff X = 5 \text{ ou } X = -2\\
&\iff e^x = 5 \text{ ou } e^x = -2 \quad \text{car } X = e^x\\
&\iff x = \ln(5).
\end{aligned}$$

Donc l'équation admet une seule solution : $x = \ln(5)$. □

1.2 Par analyse-synthèse

On commence par raisonner par implications pour chaque étape de simplification de l'équation : c'est l'analyse. Puis on considère une à une chaque valeur obtenue afin de vérifier qu'elle est bien une solution : c'est la synthèse.

— *Avantages* : très sûr, plus simple.
— *Inconvénients* : long, lourd, laborieux.

Exemple 4
Résoudre l'équation $\ln(x-1)+\ln(x-2)=\ln(2)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Solution. Analyse. L'équation est bien définie pour $x-1>0$ et $x-2>0$, c'est-à-dire pour $x \in]2,+\infty[$. Si $x \in]2,+\infty[$ est solution de l'équation, alors on a $\ln[(x-1)(x-2)] = \ln(2)$, puis en passant à l'exponentielle : $(x-1)(x-2)=2$. Par conséquent $x^2-3x=0$ et donc $x(x-3)=0$. Ainsi, si $x \in]2,+\infty[$ est solution de l'équation alors $x=0$ ou $x=3$. Synthèse. Or 0 n'est pas dans le domaine de définition de l'équation, et 3 est bien une solution de l'équation car $\ln(3-1)+\ln(3-2)=\ln(2)+\ln(1)=\ln(2)$. Finalement, l'équation admet une seule solution : 3. □

Exemple 5
Résoudre l'équation $\ln[(x-1)(x-2)]=\ln(2)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Solution. Analyse. L'équation est bien définie pour $(x-1)(x-2)>0$, c'est-à-dire pour $x \in]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$. Si $x \in]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$ est solution de l'équation, alors on a en passant à l'exponentielle : $(x-1)(x-2)=2$. Par conséquent $x^2-3x=0$ et donc $x(x-3)=0$. Ainsi, si $x \in]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$ est solution de l'équation alors $x=0$ ou $x=3$. Synthèse. Or 0 est bien une solution de l'équation car $\ln[(0-1)(0-2)]=\ln(2)$, et 3 est bien une solution de l'équation car $\ln[(3-1)(3-2)]=\ln(2)$. Finalement, l'équation admet deux solutions : 0 et 3. □

Exemple 6
Résoudre l'équation $(x-1)^{3/2}=(x-1)^{-1/2}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Solution. Analyse. L'équation est bien définie pour $x-1>0$, c'est-à-dire pour $x \in]1,+\infty[$. Si $x \in]1,+\infty[$ est solution de l'équation, alors en a en multipliant par la quantité $(x-1)^{1/2}$: $(x-1)^2=1$. Par conséquent $x^2-2x=0$ et donc $x(x-2)=0$. Ainsi, si $x \in]1,+\infty[$ est solution de l'équation alors $x=0$ ou $x=2$. Synthèse. Or 0 n'est pas dans le domaine de définition de l'équation, et 2 est bien une solution car $(2-1)^{3/2}=1=(2-1)^{-1/2}$. Finalement, l'équation admet une seule solution : 2. □

2 Résoudre une inéquation

Comme pour les équations, il s'agit de déterminer l'ensemble des valeurs de l'inconnue pour lesquelles l'inégalité entre les deux membres de l'inéquation est vraie. Les difficultés supplémentaires par rapport à une équation sont de faire très attention aux manipulations d'inégalités. Quelques techniques classiques :

— Raisonner par disjonction de cas lorsqu'on simplifie en multipliant (ou divisant) les deux membres de l'inéquation par une même quantité dépendant de l'inconnue et pouvant changer de signe.
— Essayer de se ramener à une inéquation ayant un second membre nul, puis factoriser le premier membre et étudier son signe.
— Utiliser la (stricte) monotonie des fonctions usuelles.

Pour une inéquation, on essaie de raisonner si possible par équivalences car la synthèse est souvent plus compliquée à réaliser que pour une équation du fait que l'ensemble des solutions d'une inéquation contient très souvent une infinité de valeurs.

Exercice d'application 1
Résoudre l'inéquation $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+2}<0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice d'application 2
Résoudre l'inéquation $\ln(x+3) \geqslant 1+\ln(x-1)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice d'application 3
Résoudre l'inéquation $x^2+1>\ln(x^2+1)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice d'application 4
Résoudre l'inéquation $\dfrac{mx+1}{x+2} \leqslant 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

3 Résoudre une éq. (ou inéq.) trigonométrique

Une équation ou une inéquation est dite trigonométrique lorsqu'elle fait apparaître une des fonctions trigonométriques : cosinus, sinus ou tangente. Les difficultés supplémentaires sont de faire très attention à ne pas oublier des solutions car ces fonctions sont périodiques. Quelques techniques classiques :

— Simplifier autant que possible chaque membre à l'aide des formules de trigonométrie afin de conserver le moins d'expressions trigonométriques possibles.
— S'aider d'un schéma du cercle trigonométrique ! !

Exercice d'application 5
Résoudre l'équation $\sqrt{2}\cos(\theta)=1$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice d'application 6
Résoudre l'inéquation $\sqrt{2}\sin(\theta) \leqslant 1$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice d'application 7
Résoudre l'équation $\cos(2\theta)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cos(\theta)=\frac{\sqrt{6}}{2}-1$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice d'application 8
Résoudre l'inéquation $2\sin(2\theta+\frac{\pi}{6}) \geqslant 1$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

4 Manipuler des équations du second degré

Une équation est dite du second degré si elle peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$ où x est l'inconnue (réelle ou complexe) et a, b et c sont trois nombres réels avec $a \neq 0$.

4.1 Résolution dans $\mathbb{C}$

Le nombre et l'expression des solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sont donnés par :

$$\boxed{\begin{gathered}\left\{z \in \mathbb{C} \mid az^2+bz+c=0\right\} = \begin{cases} \left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\} & \text{si } \Delta > 0 \\ \left\{\dfrac{-b}{2a}\right\} & \text{si } \Delta = 0 \\ \left\{\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\} & \text{si } \Delta < 0 \end{cases} \\ \text{où } \Delta = b^2-4ac \text{ est le discriminant de l'équation.}\end{gathered}}$$

Exemple 7
Résoudre $z^2-2mz-m+6=0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Solution. Le discriminant de cette équation est $\Delta = (-2m)^2-4(-m+6) = 4(m^2+m-6)$. On étudie le signe de $m \mapsto m^2+m-6$ qui est un polynôme du second degré. Le discriminant de ce polynôme est $1-4(-6)=25>0$, donc Δ a deux racines réelles : $m_1 = (-1-\sqrt{25})/2 = -3$ et $m_2 = (-1+\sqrt{25})/2 = 2$. Ainsi $\Delta = 4(m+3)(m-2)$ et on en déduit l'ensemble des solutions de l'équation :

$$\begin{cases} \left\{m-\sqrt{(m+3)(m-2)}, m+\sqrt{(m+3)(m-2)}\right\} & \text{si } m \in]-\infty,-3[\cup]2,+\infty[\\ \{m\} & \text{si } m \in \{-3,2\} \\ \left\{m-i\sqrt{-(m+3)(m-2)}, m+i\sqrt{-(m+3)(m-2)}\right\} & \text{si } m \in]-3,2[\end{cases}$$

□

Exercice d'application 9
Résoudre $z^2-2(m-1)z+1=0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

4.2 Relations coefficients-racines

Si on note $\{u,v\}$ l'ensemble des solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ (avec $u=v$ dans le cas où $\Delta=0$), alors on a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad az^2+bz+c = a(z-u)(z-v) = az^2-a(u+v)z+auv.$$

On en déduit les relations suivantes entre les coefficients (a,b,c) et les racines $\{u,v\}$ de cette expression polynomiale :

$$\boxed{u+v = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad uv = \frac{c}{a}}.$$

Exercice d'application 10
Trouver, en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les couples de nombres complexes $(u,v) \in \mathbb{C}^2$ tels que $u+v=m+5$ et $uv=m+5$.

5 Utiliser les racines n-ième de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Les racines n-ièmes de l'unité sont les solutions de l'équation $z^n=1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Pour les déterminer, on utilise l'écriture exponentielle.
Attention. Il est nécessaire de vérifier que $z=0$ n'est pas solution avant de pouvoir écrire $z \in \mathbb{C}^\star$ sous forme exponentielle. Ce qui est bien le cas puisque $0^n \neq 1$.
On obtient en posant $z = re^{i\theta}$ où $r>0$ et $\theta \in \mathbb{R}$:

$$z^n = 1 \iff (re^{i\theta})^n = 1 \iff r^n e^{in\theta} = 1e^{i0} \iff \begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta \equiv 0 \ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta \equiv 0 \ \left[\frac{2\pi}{n}\right] \end{cases}$$

ce qui donne n arguments principaux différents dans $[0,2\pi[$:

$$\theta \equiv 0\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{2\pi}{n}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{4\pi}{n}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{6\pi}{n}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \dots \quad \text{ou} \quad \frac{2(n-1)\pi}{n}\ [2\pi].$$

On en déduit l'ensemble des n racines n-ièmes de l'unité :

$$\boxed{\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \left\{e^{i2k\pi/n} \mid k \in [\![0,n-1]\!]\right\} = \left\{1, e^{i2\pi/n}, e^{i4\pi/n}, \dots, e^{i2(n-1)\pi/n}\right\}}.$$

Attention. Les racines n-ièmes de l'unité ne doivent pas être confondues avec les racines (carrées, cubiques, etc.) réelles. Les racines réelles sont toujours uniques alors qu'il y a exactement n racines n-ièmes de l'unité (complexes).
Remarque. Les racines n-ièmes de l'unité sont toutes situées sur le cercle unité de $\mathbb{C}$ et correspondent aux sommets d'un polygone régulier à n côtés.

Exercice d'application 11
Déterminer les racines sixièmes de l'unité sous forme algébrique et calculer leur somme.

Exercice d'application 12
Déterminer les racines septièmes de l'unité et calculer leur produit.