Fiche méthodologique n° 20

Utiliser la continuité

1 Déterminer une approximation d'une solution

La méthode de dichotomie permet de calculer des approximations numériques de solutions d'équations numériques. Plus précisément, soit une équation du type $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in [a, b]$ où f est une fonction réelle continue sur $[a, b]$ avec $f(a)f(b) \leqslant 0$. On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout $n \geqslant 0$:

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f(a_n)f(\frac{a_n+b_n}{2}) \leqslant 0 \\ \frac{a_n+b_n}{2} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f(a_n)f(\frac{a_n+b_n}{2}) \leqslant 0 \\ b_n & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes (donc convergentes vers la même limite) et leur limite commune c est une solution de l'équation $f(x) = 0$. De plus :

$$\forall n \geqslant 0, \quad a_n \leqslant \ell \leqslant b_n \quad \text{et} \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

En pratique, on choisit a et b afin qu'il n'y ait qu'une solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $[a, b]$. Pour chaque $n \geqslant 0$, les valeurs de a_n et b_n fournissent alors une approximation de cette solution à $(b - a)/2^n$ près.

Exercice d'application 1
Trouver un nombre rationnel qui soit une approximation numérique de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.

2 Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires

Les hypothèses du théorème des valeurs intermédiaires ne sont pas nombreuses, mais il faut les vérifier précisément pour pouvoir l'appliquer. Puisque la conclusion est de la forme : «il existe $c \in [a, b]$ telle que $f(c) = 0$», on commence par déterminer la fonction f et le segment $[a, b]$ adaptés au problème (souvent la partie la plus difficile). Puis on vérifie les hypothèses du théorème : f continue sur $[a, b]$ et 0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (c'est-à-dire $f(a)f(b) \leqslant 0$). Si de plus f est strictement monotone sur $[a, b]$, on peut en conclure que la solution de $f(c) = 0$ est unique dans $[a, b]$.

Exercice d'application 2
Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$ telles que $f(a) \geqslant g(a)$ et $f(b) \leqslant g(b)$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice d'application 3
Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$ telles que $f([a, b]) \subset g([a, b])$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

3 Utiliser le théorème des bornes atteintes

Comme pour le théorème des valeurs intermédiaires, la principale difficulté est de déterminer la fonction f et le segment $[a, b]$ adaptés au problème. Puis on vérifie précisément la seule hypothèse : f continue sur $[a, b]$ pour en déduire que que f est bornée et atteint ses bornes dans $[a, b]$.

Exercice d'application 4
Soit f une fonction continue et périodique définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est bornée.

Exercice d'application 5
Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$ telles que $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. Montrer que : $\exists \alpha > 0,\ \forall x \in [a, b],\ f(x) + \alpha < g(x)$.

4 Etudier la continuité d'une fonction implicite

Une fonction implicite est une fonction f dont l'image $y = f(x)$ de chaque élément x de son ensemble de définition est définie comme l'unique solution d'une équation du type $g_x(y) = 0$ où g_x est une fonction réelle qui dépend de x. Pour discuter de la continuité de f en x, il suffit d'étudier la limite de f en x à l'aide des théorèmes généraux (par exemple le théorème de la limite monotone).

Remarque : si on peut transformer l'équation en une équation du type $x = h(y)$ (où h est une fonction continue qui ne dépend pas de x), alors f est la bijection réciproque de h et on peut utiliser le théorème de la bijection continue pour justifier plus facilement la continuité de f.

Exercice d'application 6
Pour tout $x > 0$, justifier que l'équation $y = e^{-xy}$ d'inconnue $y \in \mathbb{R}$ admet une unique solution qu'on notera $f(x)$. Étudier la continuité de f sur $]0, +\infty[$.

Exercice d'application 7
Pour tout $t > 0$, justifier que l'équation $tx \ln(1 + x) = 1$ d'inconnue $x > 0$ admet une unique solution qu'on notera $f(t)$. Étudier la continuité de f sur $]0, +\infty[$

Exercice d'application 8
Pour tout $t > 0$, justifier que l'équation $x^5 + tx + t^5 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution qu'on notera $f(t)$. Montrer que f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ (on pourra commencer par montrer que $0 > f(t) > -t^4$ pour tout t>0) puis étudier la continuité de f sur $]0, +\infty[$.