

Manipuler des familles de vecteurs

1 Montrer qu'une famille est génératrice

Soient $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ une famille de vecteurs de \mathbb{K}^n et F un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n . Pour montrer que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ engendre F , il suffit de prouver que chaque vecteur \vec{v}_j appartient à F (donc $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p) \subset F$) et que chaque vecteur \vec{v} de F peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$ (donc $F \subset \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$). Pour le deuxième point, il suffit de prouver que l'équation $\sum_{j=1}^p \lambda_j \vec{v}_j = \vec{v}$ d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ admet au moins une solution. En égalisant chaque composante des deux membres de cette équation, cela revient à montrer qu'un système linéaire à n équations et p inconnues admet au moins une solution.

Exercice d'application 1

Montrer que l'hyperplan de \mathbb{R}^4 d'équation cartésienne $x + y - z + 2t = 0$ est engendré par les vecteurs suivants : $\vec{u} = (1, 0, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, 1, 0, -1)$ et $\vec{w} = (2, -2, 2, 1)$.

2 Déterminer une famille génératrice

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n .

2.1 Dans le cas d'une représentation paramétrique

Si F est défini par un système d'équations paramétriques, c'est-à-dire :

$$F = \left\{ \vec{v} = \left(\sum_{j=1}^p a_{1,j} \lambda_j, \sum_{j=1}^p a_{2,j} \lambda_j, \dots, \sum_{j=1}^p a_{n,j} \lambda_j \right), (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \right\}$$

avec $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors

$$F = \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p) \quad \text{où} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, p\}, \vec{v}_j = (a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j}) \in \mathbb{K}^n.$$

La famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ est donc une famille génératrice de F .

Exercice d'application 2

Déterminer une famille génératrice du sous-espace de \mathbb{R}^3 de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t + s \\ y = 3s - 5t \\ z = 2s \end{cases}, (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

2.2 Dans le cas d'une représentation cartésienne

Si F est défini par un système d'équations cartésiennes, c'est-à-dire :

$$F = \left\{ \vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \begin{cases} \sum_{i=1}^n b_{1,i} x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n b_{2,i} x_i = 0 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n b_{p,i} x_i = 0 \end{cases} \right\}$$

avec $B = (b_{j,i}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, alors on résout le système linéaire homogène à p équations et n inconnues x_1, x_2, \dots, x_n à l'aide de la méthode du pivot de Gauss pour exprimer chaque composante x_i de \vec{v} en fonction des inconnues auxiliaires vues comme paramètres. On obtient alors une représentation paramétrique de F . Puis on applique la méthode de la section précédente.

Exercice d'application 3

Déterminer une famille génératrice du sous-espace de \mathbb{R}^4 de représentation cartésienne :

$$\begin{cases} x + y + 2z - t = 0 \\ 2x - y + 3t = 0 \end{cases}.$$

3 Montrer qu'une famille est libre

Soit $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ une famille de vecteurs de \mathbb{K}^n .

3.1 A l'aide d'un système linéaire

Pour montrer que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ est libre, il suffit de prouver que l'équation $\sum_{j=1}^p \lambda_j \vec{v}_j = \vec{0}$ d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ admet pour unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$. En égalisant chaque composante des deux membres de cette équation, cela revient à montrer qu'un système linéaire homogène à n équations et p inconnues admet une unique solution.

Exercice d'application 4

Montrer que les vecteurs de \mathbb{R}^4 suivants forment une famille libre : $\vec{u} = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, 2, -1)$ et $\vec{w} = (2, -1, 3, 0)$.

3.2 A l'aide du rang

Pour montrer que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ est libre, il suffit de prouver que son rang est égal à p . En utilisant que

$$\text{Rg}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p) = \text{rang}(\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p))$$

où $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ est la matrice des coordonnées de $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ dans la base canonique \mathcal{E} de \mathbb{K}^n , cela revient à calculer le rang d'une matrice à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

Exercice d'application 5

Montrer que les vecteurs de \mathbb{R}^3 suivants forment une famille libre : $\vec{u} = (4, 2, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$ et $\vec{w} = (0, -1, 3)$.

4 Montrer qu'une famille est une base

Soient $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ une famille de vecteurs de \mathbb{K}^n et F un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n . Pour montrer que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ est une base de F , il suffit de prouver d'une part que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ engendre F et d'autre part que c'est une famille libre. De plus, si on connaît la dimension de F alors il suffit de prouver seulement un des deux points précédents en vérifiant au préalable que $p = \dim(F)$ et que chaque vecteur \vec{v}_j appartient à F . En pratique, il est souvent plus facile de prouver que la famille est libre plutôt qu'elle engendre F .

Exercice d'application 6

Montrer que les vecteurs suivants forment une base de l'hyperplan de \mathbb{R}^3 d'équation cartésienne $x + 2y - 4z = 0$: $\vec{u} = (2, 1, 1)$ et $\vec{v} = (0, 2, 1)$.

5 Déterminer une base

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n . Pour déterminer une base de F , on commence par déterminer une famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ génératrice de F , puis on essaie de montrer que cette famille est libre. Si elle l'est, alors c'est une base.

Exercice d'application 7

Soit H un hyperplan de \mathbb{K}^n d'équation cartésienne $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ où les scalaires $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ sont non tous nuls (on pourra par exemple supposer que $a_1 \neq 0$). Déterminer une base de H et en déduire la dimension de tout hyperplan de \mathbb{K}^n .

Si la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ génératrice de F est liée, il suffit de déterminer des vecteurs de cette famille qui sont combinaisons linéaires des autres. En retirant ces vecteurs de la famille, on obtient une base de F .

5.1 A l'aide d'un système linéaire

Si le système linéaire homogène à n équations et p inconnues obtenue à partir de l'équation $\sum_{j=1}^p \lambda_j \vec{v}_j = \vec{0}$ d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ admet une infinité de solutions, alors chaque vecteur \vec{v}_j correspondant à une inconnue auxiliaire λ_j peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres (par exemple en posant $\lambda_j = 1$ et $\vec{v}_j = \sum_{k \neq j} (-\lambda_k) \vec{v}_k$). Les vecteurs correspondant aux inconnues principales forment une base de F .

Exercice d'application 8

Déterminer une base du sous-espace de \mathbb{R}^4 de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x_1 = r + 2s \\ x_2 = r + 3s - t \\ x_3 = r + 4s - 2t \\ x_4 = r + s + t \end{cases}, (r, s, t) \in \mathbb{R}^3.$$

5.2 A l'aide du rang

Si le rang de la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ est strictement plus petit que p , alors les vecteurs correspondant aux colonnes ayant des pivots non nuls dans la matrice échelonnée obtenue à l'aide de la méthode du pivot de Gauss à partir de $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ forment une base de F (où $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ est la matrice des coordonnées de $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ dans la base canonique \mathcal{E} de \mathbb{K}^n).

Exercice d'application 9

Déterminer une base du sous-espace de \mathbb{R}^5 de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x_1 = q + 2r - s + t \\ x_2 = -q - r + 3s - t \\ x_3 = 2q + 3r - 4s + t \\ x_4 = r + 2s - t \\ x_5 = q + 3r + s - t \end{cases}, (q, r, s, t) \in \mathbb{R}^3$$

6 Calculer les coordonnées d'un vecteur dans une base

Soient \vec{v} un vecteur d'un sous-espace vectoriel F de \mathbb{K}^n et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$ une base de F . Pour calculer les coordonnées de \vec{v} dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$, il suffit de résoudre l'équation $\sum_{j=1}^p \lambda_j \vec{e}_j = \vec{v}$ d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$. En égalisant chaque composante des deux membres de cette équation, cela revient à résoudre un système linéaire à n équations et p inconnues.

Exercice d'application 10

Montrer que les vecteurs $\vec{v}_1 = (1, 0, 1, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 0, 1, 1)$ et $\vec{v}_3 = (1, 2, 3, 4, 5)$ forment une base du sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^5 de représentation cartésienne :

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

puis montrer que le vecteur $\vec{v}(-5, 0, -1, 2, -1)$ appartient à ce sous-espace et calculer ses coordonnées dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.