Fiche méthodologique n° 22

Étudier localement des fonctions réelles

1 Déterminer un DL d'une fonction réelle

Soient f une fonction réelle définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1.1 À l'aide des opérations sur les DL usuels

Si f se décompose comme plusieurs opérations de fonctions usuelles, alors on obtient le $\mathrm{DL}_n(a)$ de f à l'aide des mêmes opérations sur les développements limités usuels.
Conseil : si $a \neq 0$, on commence toujours par se ramener à un $\mathrm{DL}_n(0)$ à l'aide du changement de variable $x = a + h$.
Attention : dans le cas d'un quotient dont le dénominateur s'annule, il est nécessaire d'utiliser un DL du numérateur à un ordre strictement supérieur à n pour obtenir un DL du quotient d'ordre égal à n après simplification.

Exercice d'application 1
Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x} - \cos(x)}{e^x - 1}$.

Exercice d'application 2
Déterminer le $\mathrm{DL}_2(1)$ de $x \mapsto \dfrac{\ln(x)^2}{x^3 - 3x + 2}$

1.2 À l'aide de la formule de Taylor-Young

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de a, alors la formule de Taylor-Young permet de calculer le $\mathrm{DL}_n(a)$ de f à l'aide des dérivées successives en a :

$$\boxed{\begin{aligned} f(a+h) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right) \\ &= f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{6}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right) \end{aligned}}.$$

Exercice d'application 3
Montrer que $f : x \mapsto e^{-1/x^2}$ admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P_n \in \mathbb{R}[X],\ f^{(n)} : x \mapsto \begin{cases} P_n(x)x^{-3n}f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^\star \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

En déduire que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et déterminer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de f pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Calculer une limite à l'aide d'un DL

Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ pour un ordre $n \in \mathbb{N}$ alors la limite de f en a est égale au terme constant du développement limité :

$$\left(f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} c_k h^k + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right)\right) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = c_0.$$

Conseil : il suffit donc de calculer un DL_0 pour déterminer la limite.

Exercice d'application 4
Étudier la limite de $\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}$ quand $x \to 1$.

3 Déterminer un équivalent à l'aide d'un DL

Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ différent de 0 pour un ordre $n \in \mathbb{N}$ alors un équivalent de f en a est donné par le terme non nul de plus bas degré du développement limité :

$$\left(f(a+h) = \sum_{k=m}^{n} c_k h^k + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right) \text{ et } c_m \neq 0\right) \Rightarrow f(x) \underset{x\to a}{\sim} c_m(x-a)^m.$$

Conseil : il suffit donc de calculer un DL au plus petit ordre tel que le DL soit non nul pour déterminer un équivalent.

Exercice d'application 5
Déterminer un équivalent en 0 de $x \mapsto 2\tan(x) - x(\cos(x) + 1)$.

4 Etudier une tangente d'une courbe représentative

Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. L'existence d'une tangente (non verticale) $\mathcal{T}_a$ à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point d'abscisse a est équivalente à la dérivabilité de f en a, c'est-à-dire à l'existence d'un $\mathrm{DL}_1(a)$ de f. L'équation de cette tangente $\mathcal{T}_a$ est alors donnée par :

$$\left(f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \underset{h\to 0}{o}\left(h\right)\right) \Rightarrow \mathcal{T}_a : y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

De plus, si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ différent du $\mathrm{DL}_1(a)$ pour un ordre $n \geqslant 2$ alors on a :

$$\left(f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \sum_{k=m}^{n} c_k h^k + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right) \text{ où } \begin{cases} m \geqslant 2 \\ c_m \neq 0 \end{cases}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) - \big(f(a) + f'(a)(x-a)\big) \underset{x\to a}{\sim} c_m(x-a)^m.$$

Par conséquent, la position de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f par rapport à sa tangente $\mathcal{T}_a$ au voisinage de a est donnée par le signe du terme non nul de plus bas degré après celui de degré 1 du développement limité :
- si m est pair et $c_m > 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{T}_a$ au voisinage de a,
- si m est pair et $c_m < 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{T}_a$ au voisinage de a,
- si m est impair alors $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en a, c'est-à-dire $\mathcal{C}_f$ traverse $\mathcal{T}_a$ en a (avec $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{T}_a$ au voisinage à gauche de a puis au-dessus de $\mathcal{T}_a$ au voisinage à droite de a si $c_m > 0$, et inversement si $c_m < 0$).

Exercice d'application 6
Étudier la tangente au point d'abscisse 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$.

Exercice d'application 7
Étudier la tangente au point d'abscisse 1 de $x \mapsto \dfrac{\sqrt{3+x}}{1+x^2}$.

5 Etudier une asymptote d'une courbe représentative

Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $+\infty$. Une droite asymptote $\mathcal{A}_{+\infty}$ à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f en $+\infty$ est une droite d'équation $\mathcal{A}_{+\infty} : y = ax + b$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b) = 0$. À l'aide du changement de variable $h = 1/x$, cette limite peut s'écrire $f(1/h) = \frac{a}{h} + b + o_{h\to 0^+}(1)$ donc $hf(1/h) = a + bh + o_{h\to 0^+}(h)$. Ainsi, pour qu'il existe une droite asymptote $\mathcal{A}_{+\infty}$ il suffit qu'il existe un $\mathrm{DL}_1(0^+)$ de $h \mapsto hf(1/h)$. L'équation de cette asymptote est alors donnée par :

$$\left(hf\left(\frac{1}{h}\right) = c_0 + c_1 h + \underset{h\to 0^+}{o}(h)\right) \Rightarrow \mathcal{A}_{+\infty} : y = c_0 x + c_1.$$

De plus, si $h \mapsto hf(1/h)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0^+)$ différent du $\mathrm{DL}_1(0^+)$ pour un ordre $n \geqslant 2$ alors on a :

$$\left(hf\left(\frac{1}{h}\right) = c_0 + c_1 h + \sum_{k=m}^{n} c_k h^k + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right) \text{ où } \begin{cases} m \geqslant 2 \\ c_m \neq 0 \end{cases}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) - \left(c_0 x + c_1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} c_m \frac{(1/x)^m}{1/x} = \frac{c_m}{x^{m-1}}.$$

Par conséquent, la position de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f par rapport à son asymptote $\mathcal{A}_{+\infty}$ au voisinage de $+\infty$ est donnée par le signe du terme non nul de plus bas degré après celui de degré 1 du développement limité :
- si $c_m > 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{A}_{+\infty}$ au voisinage de $+\infty$,
- si $c_m < 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{A}_{+\infty}$ au voisinage de $+\infty$.

La méthode est similaire pour l'étude d'une droite asymptote à la courbe représentative en $-\infty$ d'une fonction réelle f définie au voisinage de $-\infty$: il suffit de déterminer un $\mathrm{DL}_n(0^-)$ de $h \mapsto hf(1/h)$.

Exercice d'application 8
Étudier le comportement asymptotique en $+\infty$ de $x \mapsto 3x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$.

Exercice d'application 9
Étudier le comportement asymptotique en $\pm\infty$ de $x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{2+x}$.

6 Étudier une branche parabolique d'une courbe repr.

Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $+\infty$. On dit que la courbe représentative de f admet une branche parabolique en $+\infty$ selon
- l'axe des ordonnées si et seulement si $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = \pm\infty$,
- l'axe d'équation $y = ax$ avec $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = a$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = \pm\infty$.

Les définitions sont similaires pour les branches paraboliques en $-\infty$.

Exercice d'application 10
Étudier le comportement asymptotique en $\pm\infty$ de $x \mapsto \exp(x)$ et $x \mapsto \ln(x)$.

Exercice d'application 11
Étudier le comportement asymptotique en $\pm\infty$ de $x \mapsto 2x + \ln(1+x^2)$.