Fiche méthodologique n° 22

Utiliser la dérivabilité

1 Calculer une limite avec un taux d'accroissement

Si un calcul de limite peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

où f est une fonction réelle définie au voisinage de a, alors la limite existe et est finie si et seulement si f est dérivable en a. Dans ce cas la limite est égale à $f'(a)$.

Exercice d'application 1
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2} \qquad \lim_{x\to+\infty} x\arctan(1/x)$$

$$\lim_{x\to \pi/4} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{4x-\pi} \qquad \lim_{x\to -1} \frac{\ln(2x+3)}{e^{x+1}+x}$$

2 Utiliser le théorème des accroissements finis

2.1 Justifier une existence

Le théorème des accroissements finis permet de prouver que le taux d'accroissement d'une fonction entre deux points est atteint par la dérivée entre ces deux points. Plus précisément, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ alors :

$$\boxed{\exists c \in]a,b[,\ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}.$$

Dans le cas particulier où $f(a) = f(b)$, on obtient le théorème de Rolle : la dérivée s'annule au moins une fois sur $]a,b[$.

Exercice d'application 2
Soient $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que le polynôme $P = X^n + \alpha X + \beta$ admet au plus trois racines réelles distinctes.

Exercice d'application 3
Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur le segment $[a,b]$ et dérivables sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ telles que g' ne s'annule pas sur $]a,b[$. Montrer que $g(a) \neq g(b)$ puis, en appliquant le théorème de Rolle à une fonction bien choisie, que

$$\exists c \in]a,b[,\ \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

2.2 Prouver des inégalités

Le théorème des accroissements finis permet aussi d'encadrer la variation d'une fonction entre deux points lorsqu'on sait borner la dérivée de cette fonction entre ces deux points. Plus précisément, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ avec $m \leqslant f' \leqslant M$ où $(m,M) \in \mathbb{R}^2$ alors :

$$m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M(b-a).$$

Exercice d'application 4
Montrer que $\forall x \geqslant 0,\ \frac{x}{1+x^2} \leqslant \arctan(x) \leqslant x$.

Exercice d'application 5
Montrer que $\forall x > 0,\ 1-\frac{1}{x} \leqslant \ln(x) \leqslant x-1$.

Exercice d'application 6
Soit $\alpha \geqslant 1$. Montrer que $\forall x > -1,\ (1+x)^\alpha \geqslant 1+\alpha x$ (inégalité de Bernoulli).

2.3 Estimer la vitesse de convergence d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite définie par la donnée de son premier terme $u_{n_0} \in \mathbb{R}$ et une relation de récurrence du type :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = f(u_n)$$

où f est une fonction réelle définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que l'étude de $f : I \to \mathbb{R}$ a permis de prouver que $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente. Si de plus on peut montrer que f est dérivable sur I avec $|f'| \leqslant k$ où $k \in]0,1[$ alors le théorème des accroissements finis donne une estimation de la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

En effet, en notant $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$ la limite de $(u_n)_{n\geqslant n_0}$, on remarque que $\ell = f(\ell)$ en passant à la limite dans la relation de récurrence (car f est continue en ℓ). Donc :

$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_{n+1}-\ell| = |f(u_n)-f(\ell)| \leqslant k|u_n-\ell|$$

ce qui permet de montrer par récurrence :

$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_n-\ell| \leqslant k^n|u_{n_0}-\ell|.$$

Ainsi l'écart entre les termes de la suite et sa limite est majoré par les termes d'une suite géométrique qui converge vers 0 (car $k \in]0,1[$). Autrement dit, la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge «géométriquement vite» vers sa limite.

Exercice d'application 7
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$. Montrer que $u_n \in [\sqrt{2}, 2]$ pour tout $n \geqslant 0$. En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie. Puis montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite. Enfin, montrer que u_{10} est une approximation de la limite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à 10^{-6} près.

3 Déterminer une approximation d'une solution : la méthode de Newton

La méthode de Newton est une méthode efficace pour calculer numériquement une approximation d'une solution d'une équation réelle. Elle consiste à définir par récurrence une suite numérique qui converge vers la solution cherchée. Plus précisément, on considère un «petit» intervalle I et une équation de la forme $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in I$ tels que f est dérivable sur I et l'équation admet une unique solution sur I. Alors, on commence par fixer une valeur $x_0 \in I$ «proche» de la solution puis on construit une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ par récurrence de la manière suivante (voir le graphique) :
— en supposant qu'on a construit le terme x_n pour un entier $n \geqslant 0$ fixé, on considère la tangente T_n à la courbe représentative de f en x_n :

$$T_n : y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

— on construit alors x_{n+1} comme l'intersection de T_n avec l'axe des abscisses :

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \quad \text{donc} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Il suffit donc d'étudier $F : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ pour étudier la suite récurrente $(x_n)_{n\geqslant 0}$.
Remarque : en particulier, la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie si et seulement si F est définie en x_n pour tout entier $n \geqslant 0$. Il est par exemple suffisant de montrer que f' ne s'annule pas sur I et que $F(I) \subset I$. On suppose que c'est le cas pour la suite.

1) **Limite de $(x_n)_{n\geqslant 0}$.** On suppose que l'étude de $F : I \to \mathbb{R}$ a permis de prouver que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente. En notant $\ell = \lim_{n\to+\infty} x_n$, on remarque que si F est continue sur I alors

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} F(x_n) = F(\ell) = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)} \quad \text{donc} \quad f(\ell) = 0.$$

Ainsi la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers la solution de l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in I$, ce qui justifie que le calcul du terme x_n pour une «grande» valeur de n fournit une approximation de cette solution.

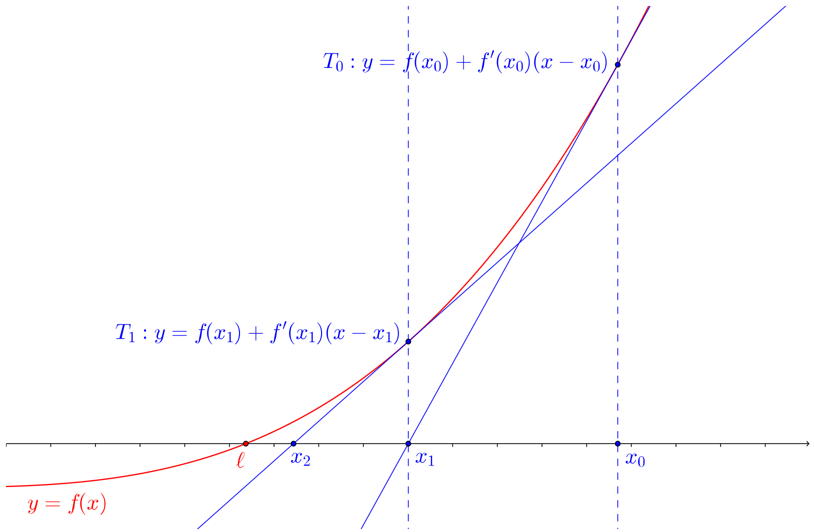
2) **Vitesse de convergence.** On remarque également que si F est dérivable sur I alors :

$$F'(\ell) = 1 - \frac{f'(\ell)f'(\ell) - f(\ell)f''(\ell)}{f'(\ell)^2} = 1 - 1 + 0 = 0.$$

Si de plus F' est continue en ℓ alors $|F'| < 1$ au voisinage de ℓ. Ainsi, en choisissant I suffisamment «petit» au départ de la méthode, on peut trouver $k \in]0,1[$ tel que $|F'| \leqslant k$ sur I. On obtient alors d'après l'estimation de la vitesse de convergence d'une suite récurrente à l'aide du théorème des accroissements finis :

$$\forall n \geqslant 0,\ |x_n - \ell| \leqslant k^n |x_0 - \ell|.$$

Ainsi la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge «géométriquement vite» vers la solution de l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in I$, ce qui justifie l'efficacité de la méthode de Newton.
Remarque : on peut montrer avec d'autres méthodes que la vitesse de convergence de la méthode de Newton est en fait beaucoup plus rapide que celle obtenue avec le théorème des accroissements finis.



Exercice d'application 8
Déterminer une approximation de $\sqrt{3}$ à 10^{-6} près.

Exercice d'application 9
Montrer que l'équation $\cos(x) = x$ d'inconnue $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ admet une unique solution et déterminer une approximation à 10^{-6} près de la solution (on pourra commencer par montrer que la solution est comprise entre $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{4}$).