Fiche méthodologique n° 25

Manipuler des variables aléatoires

1 Déterminer une loi de probabilité

Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, c'est déterminer :
— l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs possibles de X,
— les probabilités $P(X = x)$ pour toutes les valeurs $x \in X(\Omega)$.

Exercice d'application 1
Déterminer la loi de probabilité du maximum d'un lancer de 42 dés équilibrés à six faces. Même question pour le minimum.

Exercice d'application 2
Soit $n \in \mathbb{N}$. On choisit au hasard et de façon équiprobable un entier X entre 1 et n, puis un entier Y entre 1 et X. Déterminer la loi de probabilité de Y.

Exercice d'application 3
On tire successivement et sans remise cinq boules d'une urne contenant trois boules rouges et sept boules vertes. On note X le nombre de boules rouges obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X.

On peut également se ramener aux lois de probabilités usuelles :
— la loi uniforme $\mathcal{U}(n)$ où $n \in \mathbb{N}^\star$,
— la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ où $p \in [0, 1]$,
— la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ où $(n, p) \in \mathbb{N} \times [0, 1]$.

Exercice d'application 4
On tire successivement et avec remise dix boules d'une urne contenant trente boules rouges et vingt boules vertes. Chaque boule verte fait gagner 1€ alors que chaque boule rouge fait perdre 5€. Déterminer la loi de probabilité du gain.

2 Calculer une espérance et une variance

2.1 A l'aide de la loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. L'espérance et la variance de X sont définies par

$$\boxed{E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)}$$

et $$\boxed{V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 P(X = x)}.$$

Il suffit donc de déterminer la loi de probabilité de X pour calculer son espérance et sa variance. Pour la variance, il est souvent plus simple d'utiliser la formule de Koenig-Huygens :

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X = x) - E(X)^2}.$$

Exercice d'application 5
Déterminer l'espérance et la variance du maximum d'un lancer de 42 dés équilibrés à six faces. Même question pour le minimum.

Exercice d'application 6
Soit $n \in \mathbb{N}$. On choisit au hasard et de façon équiprobable un entier X entre 1 et n, puis un entier Y entre 1 et X. Déterminer l'espérance et la variance de Y.

2.2 A l'aide du théorème de transfert

Dans le cas d'une variable aléatoire composée $g(X)$ où X est une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle, le théorème de transfert permet de calculer l'espérance de $g(X)$ seulement à l'aide de la loi de probabilité de X :

$$\boxed{E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) P(X = x)}.$$

En particulier, le théorème de transfert permet de calculer l'espérance de $g(X)$ sans avoir besoin de déterminer sa loi de probabilité.

Exercice d'application 7
Soit X une variable aléatoire de loi uniforme $\mathcal{U}(2n+1)$ où $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'espérance et la variance du maximum entre X et son espérance $E(X)$.

Exercice d'application 8
Déterminer l'espérance et la variance du gain de l'exercice 4.

3 Utiliser l'indépendance

Un couple de variables aléatoires (X, Y) est indépendant lorsque :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ P(X = x \text{ et } Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

En particulier, si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ (mais la réciproque est fausse). Par contraposée, il suffit donc de montrer $E(XY) \neq E(X)E(Y)$ pour justifier que X et Y ne sont pas indépendantes.