Fiche méthodologique n° 26

Calculer des intégrales

1 Calculer une intégrale par intégration par parties

L'intégration par parties permet de transformer le calcul d'une intégrale d'un produit de fonctions du type $f \times g'$, en celui de l'intégrale du produit $f' \times g$. Plus précisément, si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, alors :

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x}.$$

En pratique, on choisit les fonctions f et g' afin que (une primitive g de g' soit facile à déterminer et) le calcul de l'intégrale de $f' \times g$ soit plus simple que celui de l'intégrale de départ.

Exercice d'application 1
Calculer les intégrales suivantes : $\displaystyle\int_1^2 x\ln(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^2 \cos(\pi t)e^t\mathrm{d}t$.

Un exemple classique d'intégration par parties est fourni par le calcul d'une intégrale du type

$$I_n = \int_a^b P_n(x)h(x)dx \quad \text{où} \quad \begin{cases} P_n \text{ un polynôme de degré } n \in \mathbb{N}^* \\ h : x \mapsto \cos(x) \text{ ou } \sin(x) \text{ ou } \exp(x) \end{cases}.$$

Dans ce cas, on utilise une intégration par parties en posant :

$$\begin{cases} f = P_n \\ g' = h \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} f' = P_n' \text{ un polynôme de degré } n-1 \\ g : x \mapsto \sin(x) \text{ ou } -\cos(x) \text{ ou } \exp(x) \end{cases}$$

pour se ramenerau calcul d'une intégrale du type I_{n-1}. Si $n-1 \geqslant 1$ on réitère la méthode, sinon on calcule I_0 à l'aide d'une primitive de h car P_0 est une constante. En résumé, on effectue n intégrations par parties successives pour calculer I_n. La méthode est identique si h est de la forme $x \mapsto \cos(ax+b)$, $x \mapsto \sin(ax+b)$ ou $x \mapsto \exp(\alpha x)$.

Exercice d'application 2
Calculer les intégrales suivantes : $\displaystyle\int_{-1}^1 (x-1)(x+1)e^x\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t^4\cos(2t)\mathrm{d}t$.

2 Calculer une intégrale par changement de variable

Un changement de variable permet de transformer le calcul d'une intégrale par rapport à une variable en celui d'une autre intégrale par rapport à une nouvelle variable . En pratique, on choisit le changement de variable afin que le calcul de la nouvelle intégrale soit plus simple que la précédente.

Plus précisément, si on souhaite calculer l'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ où $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$ à l'aide du changement de variable $x = \varphi(t)$, il suffit de vérifier les hypothèses suivantes :
(1) il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$,
(2) φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle contenant α et β.
Ensuite on remplace la variable x par $\varphi(t)$ dans l'intégrale, sans oublier de changer les bornes et le dx à l'aide de l'astuce de notation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t) \quad \text{donc} \quad \mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

On obtient finalement :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t}.$$

Exercice d'application 3
Calculer les intégrales suivantes à l'aide des changements de variable indiqués :

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \text{ (en posant } x = \sin(\theta)) \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}a}{1+\tan(a)} \text{ (en posant } a = \frac{\pi}{2} - b).$$

Exercice d'application 4
Calculer les intégrales suivantes à l'aide des changements de variable indiqués :

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx \text{ (en posant } t = e^x) \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{t}{1+t^4}\mathrm{d}t \text{ (en posant } s = t^2).$$

Un exemple classique de changement de variable est utilisé pour le calcul d'une intégrale d'un quotient de fonctions trigonométriques (cosinus, sinus et tangente). Dans ce cas, pour se ramener à un quotient de fonctions polynomiales, on utilise le changement de variable :

$$t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \iff \theta = 2\arctan(t).$$

Pour simplifier les calculs, on peut utiliser les relations suivantes qu'on retrouve à l'aide des formules de trigonométrie :

$$\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan(\theta) = \frac{2t}{1-t^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\theta = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Exercice d'application 5
Calculer les intégrales suivantes : $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin(\theta)}$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos(x)}$.

3 Calculer la limite d'une somme de Riemann

Pour calculer la limite d'une somme du type $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k$ ou $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$, on peut l'écrire comme une somme de Riemman puis utiliser un calcul d'intégrale. Plus précisément, si u_k est de la forme $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ où f est une fonction continue sur $[0,1]$, alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}.$$

En pratique, on remplace k par $n\times\left(\frac{k}{n}\right)$ dans l'expression de u_k, on factorise par $\frac{1}{n}$ pour faire apparaitre ce terme en facteur de la somme, puis on détermine $f(x)$ en remplaçant $\frac{k}{n}$ par x.

Exercice d'application 6

Calculer les limites suivantes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n^2+k^2}$.

Exercice d'application 7

Pour toute puissance $p\in\mathbb{N}^\star$ et tout entier $n\in\mathbb{N}^\star$ on note $S_p(n)$ la p-ième somme d'Euler, c'est-à-dire la somme des n premières puissances p-ièmes d'entiers. Montrer que $S_p(n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n^{p+1}}{p+1}$.

4 Étudier une fonction définie par une intégrale

Si G est une fonction de la forme

$$G : x\mapsto\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t \quad \text{où} \quad \begin{cases}(u,v)\in\left(\mathscr{C}^1(I)\right)^2\\ u(I)\subset J \text{ et } u(I)\subset J\\ f\in\mathscr{C}^0(J)\end{cases}$$

avec I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si on considère F une primitive f sur J, on remarque que :

$$G : x\mapsto\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t=\Big[F(t)\Big]_{u(x)}^{v(x)}=F(v(x))-F(u(x)).$$

Ainsi G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I comme somme et composées de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et sa dérivée est donnée par :

$$\forall x\in I,\ G'(x)=v'(x)F'\left(v(x)\right)-u'(x)F'\left(u(x)\right)=v'(x)f\left(v(x)\right)-u'(x)f\left(u(x)\right).$$

Exercice d'application 8

Montrer que la fonction $F : x\mapsto\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son ensemble de définition et dresser son tableau des variations.

Exercice d'application 9

Étudier la fonction $F : t\mapsto\displaystyle\int_{1/t}^{t}\frac{\ln(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ sur $]0,+\infty[$.