Fiche méthodologique n° 27

Étudier des applications linéaires

1 Montrer qu'une application est linéaire

Une application $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ est linéaire si et seulement si

$$\forall(\lambda, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^p \times \mathbb{K}^p, \quad f\left(\lambda \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = \lambda f\left(\overrightarrow{u}\right) + f\left(\overrightarrow{v}\right).$$

Exercice d'application 1
Montrer que l'application suivante est linéaire :

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z, t) \mapsto (2x - y + 3z, 3x - z + 2t, x + y + z + t).$$

Exercice d'application 2
Déterminer les valeurs de $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ pour lesquelles l'application suivante est linéaire :

$$f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, (w, z) \mapsto aw + b\overline{z} + c.$$

2 Étudier le noyau d'une application linéaire

Le noyau d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ est définie par :

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{K}^p \mid f\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0_n}\right\}.$$

Il est donc décrit par une représentation cartésienne. Pour en déterminer une famille génératrice, il suffit alors d'échelonner le système linéaire associé pour pouvoir écrire chaque coordonnée des vecteurs du noyau en fonction des inconnues auxiliaires vues comme des paramètres. On obtient ainsi une famille génératrice du noyau de laquelle on peut extraire une base. Si on connait le rang de f, on peut également s'aider du théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = p - \mathrm{rang}(f).$$

Exercice d'application 3
Déterminer la dimension et une base du noyau de l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z, t) \mapsto (x + 2y + 3z + 4t, 2x - y - z + 3t).$$

3 Étudier l'image d'une application linéaire

L'image d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ est définie par :

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{\overrightarrow{y} = f\left(\overrightarrow{x}\right) \in \mathbb{K}^n \mid \overrightarrow{x} \in \mathbb{K}^p\right\}.$$

Elle est donc décrite par une représentation paramétrique. On obtient alors directement une famille génératrice de l'image de laquelle on peut extraire une base. Si on connait le noyau de f, on peut également s'aider du théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = p - \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

Exercice d'application 4
Déterminer la dimension et une base de l'image de l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, (x, y, z) \mapsto (x - 3y + 2z, 2x + 5y - 3z, 7x + y, 5x - 4y + 3z).$$

4 Déterminer la matrice d'une application linéaire

Soient $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ et $\mathcal{F} = (\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{f}_n})$ des bases de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ respectivement. La matrice d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ de la base $\mathcal{E}$ vers la base $\mathcal{F}$ est définie par :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) = \left(\mathrm{mat}_{\mathcal{F}}\left(f\left(\overrightarrow{e_1}\right)\right) \mathrm{mat}_{\mathcal{F}}\left(f\left(\overrightarrow{e_2}\right)\right) \ldots \mathrm{mat}_{\mathcal{F}}\left(f\left(\overrightarrow{e_p}\right)\right)\right) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Les coefficients de chacune de ses colonnes sont donc les coordonnées des images des vecteurs de $\mathcal{E}$ dans la base $\mathcal{F}$.

Exercice d'application 5
Montrer que $\overrightarrow{e_1} = (-1, 1, 2)$, $\overrightarrow{e_2} = (0, -1, -3)$ et $\overrightarrow{e_3} = (1, 0, 0)$ forment une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer les matrices de l'application linéaire suivante de la base canonique vers elle-même et de la base $\mathcal{E}$ vers elle-même :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (6y + 3x - 2z, z - y, 4z - 6y).$$

5 Montrer qu'une app. lin. est injective ou surjective

Pour étudier l'injectivité et la surjectivité d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, il suffit d'étudier respectivement son noyau et son image. Plus précisément, on a :

$$\begin{array}{lcl} f \text{ injective} & \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_p}\} & \Leftrightarrow \mathrm{rang}(f) = p \\ f \text{ surjective} & \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}^n & \Leftrightarrow \mathrm{rang}(f) = n \end{array}.$$

Si on étudie la matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de f d'une base quelconque $\mathcal{E}$ de $\mathbb{K}^p$ vers une base quelconque $\mathcal{F}$ de $\mathbb{K}^n$, on a :

$$\begin{array}{rcl} f \text{ injective} & \Leftrightarrow & \mathrm{rang}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)\right) = p \\ f \text{ surjective} & \Leftrightarrow & \mathrm{rang}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)\right) = n \end{array}.$$

En particulier, f est bijective (isomorphisme) si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$ est une matrice carrée (donc f est un endomorphisme) et de rang maximal, c'est-à-dire inversible (et donc f est un automorphisme).
Remarque : si on a le choix, il est plus simple en pratique d'utiliser les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

Exercice d'application 6
Etudier l'injectivité et la surjectivité de l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x - y - 2z, 2x + y + z, x + 2y - z).$$

Exercice d'application 7
Etudier l'injectivité et la surjectivité de l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, (w, z) \mapsto (w + iz, iw + z).$$

Exercice d'application 8
Etudier l'injectivité et la surjectivité de l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6, (x, y, z) \mapsto (x + y, z, x + z, y, y + z, x).$$

Exercice d'application 9
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Etudier l'injectivité et la surjectivité de l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} k x_k.$$

Exercice d'application 10
Etudier l'injectivité et la surjectivité de l'application linéaire suivante en fonction des valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x + 2(1-a)y + (a-1)z, x + 4y - z, 2x + 2(4-a)y + (a-2)z).$$