Fiche méthodologique n° 28

Étudier des fonctions réelles de deux variables

1 Déterminer l'ensemble de définition

L'ensemble de définition d'une fonction réelle f de $n \geqslant 2$ variables est la plus grande partie $\mathscr{D}_f \subset \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ soit bien défini pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{D}_f$. Pour déterminer $\mathscr{D}_f$, il suffit d'écrire f comme le résultat de plusieurs opérations sur des fonctions usuelles dont on connait les ensembles de définition.
Attention. $\mathscr{D}_f$ n'est en général par un produit cartésien. Les ensembles de définition de chaque fonction partielle $f_k : x_k \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ obtenus en fixant toutes les variables sauf une (la k-ième où $k \in [\![1, n]\!]$) ne permettent donc pas d'en déduire $\mathscr{D}_f$. Il est nécessaire de faire varier toutes les variables en même temps.

Exemple 1
Déterminer l'ensemble de définition de $f : (x, y) \mapsto \ln(x^2 + x + y^2)$.

Solution. Puisque l'ensemble de définition de la fonction ln est $]0, +\infty[$, l'expression $f(x, y)$ est définie si et seulement si :

$$x^2 + x + y^2 > 0 \iff \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} + y^2 > 0 \iff \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 > \tfrac{1}{4} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2.$$

On reconnaît l'équation cartésienne d'un cercle. Donc l'ensemble de définition de f est l'extérieur du disque de centre $(\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ (le cercle non compris). $\square$

Exercice d'application 1
Déterminer l'ensemble de définition de $f(x, y) \mapsto (x^2 - x + y^2 + 1)^{1/(x^2 - xy)}$.

Exercice d'application 2
Déterminer l'ensemble de définition de $f(x, y) \mapsto \arccos(y/x)$.

2 Calculer des dérivées partielles

Les dérivées partielles d'une fonction réelle f de $n \geqslant 2$ variables sont définies comme les fonctions dérivées des n fonctions partielles $f_k : x_k \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où $k \in [\![1, n]\!]$. Pour calculer la dérivée partielle $\partial f / \partial x_k$ de f par rapport à x_k, il suffit donc de dériver l'expression $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ par rapport à x_k en fixant toutes les autres variables, c'est-à-dire en les considérant comme des constantes.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_k}\Big[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_k}\Big[f_k(x_k)\Big] = f_k'(x_k).$$

Remarque. Puisque chaque dérivée partielle $\partial f / \partial x_k$ est aussi une fonction de n variables, on peut calculer ses n dérivées partielles. On obtient ainsi n^2 dérivées partielles d'ordre 2 de f qui sont de la forme :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big].$$

En itérant les calculs, on obtient n^k dérivées partielles d'ordre k de f pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice d'application 3
Déterminer les dérivées partielles de $f : (a, b, c, d) \mapsto \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Exercice d'application 4
Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de $f : (x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + z^4}/y^3$.

Exercice d'application 5
Déterminer les dérivées partielles d'ordre 3 de $f : (x, y) \mapsto \tan(x) \exp(y^2)$.

Remarque. Si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^k$ au voisinage de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, c'est-à-dire si toutes les dérivées partielles d'ordre inférieure ou égal à k existent et sont continues, alors le théorème de Schwarz affirme que l'ordre de dérivation n'a pas d'importance (autrement dit que les $\partial / \partial x_i$ et $\partial / \partial x_j$ commutent) ce qui permet de vérifier les calculs pour les dérivées «croisées».

3 Représenter des lignes de niveau et des gradients

La ligne de niveau de hauteur $c \in \mathbb{R}$ d'une fonction réelle f de $n \geqslant 2$ variables est l'ensemble des points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui admettent pour image c, c'est-à-dire :

$$\mathscr{L}_c = \Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{D}_f \ \big|\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c\Big\}.$$

En chaque point $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{L}_c$, le vecteur gradient défini par

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right)$$

est perpendiculaire à la ligne de niveau $\mathscr{L}_c$ et est dirigé dans le sens croissant de la pente (donc vers les lignes de niveaux de hauteur supérieure).

Exercice d'application 6
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, représenter graphiquement quelques lignes de niveau et quelques vecteurs gradient de $f : (x, y) \mapsto \ln(x/y)$.

Exercice d'application 7
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, représenter graphiquement quelques lignes de niveau et quelques vecteurs gradient de $f : (x, y) \mapsto 1/\sqrt{x + y - (x^2 + y^2)}$.

4 Étudier les extrema d'une fonction de plusieurs var.

Si une fonction réelle f de $n \geqslant 2$ variables admet un extremum local en un point alors le gradient de f en ce point est égal au vecteur nul.
Attention. La réciproque est fausse ! Autrement dit, la condition $\overrightarrow{\text{grad}}_{(a_0,a_1,\ldots,a_n)} f = \overrightarrow{0}$ est nécessaire pour que $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ soit un extremum local de f mais pas suffisante.
Pour déterminer les extrema de f, on commence par déterminer les points critiques de f, c'est-à-dire les points $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathscr{D}_f$ tels que $\overrightarrow{\text{grad}}_{(a_0,a_1,\ldots,a_n)} f = \overrightarrow{0}$. Pour chacun de ces points, on étudie ensuite le signe de la quantité :

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) - f(a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

- Si cette quantité est positive pour tout $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{D}_f$ au voisinage de $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, alors f admet un minimum local en $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.
- Si cette quantité est positive pour tout $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{D}_f$ alors f admet un minimum global en $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.
- Si cette quantité est négative pour tout $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{D}_f$ au voisinage de $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, alors f admet un maximum local en $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.
- Si cette quantité est négative pour tout $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{D}_f$ alors f admet un maximum global en $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.
- Si cette quantité change de signe au voisinage de $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, alors f admet un point «selle» (ou point «col») en $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, en particulier $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ n'est pas un extremum local de f.

Conseil. Pour l'étude du signe au voisinage de $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, il est plus facile de poser $(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (a_0 + h_0, a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n)$ et donc d'étudier le signe de la quantité :

$$f(a_0 + h_0, a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n) - f(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

pour tout $(h_0, h_1, \ldots, h_n)$ au voisinage de $(0, 0, \ldots, 0)$.

Exemple 2
Étudier les extrema de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 - 6y^2 + y^3$.

Solution. On a pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\overrightarrow{\text{grad}}_{(a,b)} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right) = (2a, -12b + 3b^2) = \overrightarrow{0} \iff \left\{\begin{array}{c} a = 0 \\ b = 0 \text{ ou } b = 4 \end{array}\right. .$$

Donc, si (a, b) est un extremum local de f alors $(a, b) = (0, 0)$ ou $(a, b) = (0, 4)$. De plus, on a pour tout $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0, 0) = h_1^2 - 6h_2^2 + h_2^3 = h_1^2 + h_2^2(-6 + h_2).$$

En particulier, on a pour h au voisinage de 0 :

$$f(0 + h, 0) - f(0, 0) = h^2 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad f(0, 0 + h) - f(0, 0) = h^2(-6 + h) \leqslant 0.$$

Donc $(0, 0)$ est un point «selle» de f. De même, on a pour tout $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(0 + h_1, 4 + h_2) - f(0, 4) &= h_1^2 - 6(4 + h_2)^2 + (4 + h_2)^3 + 32 \\ &= h_1^2 + 6h_2^2 + h_2^3 = h_1^2 + h_2^2(6 + h_2). \end{aligned}$$

En particulier, on a pour tout (h_1, h_2) au voisinage de $(0, 0)$:

$$f(0 + h_1, 4 + h_2) - f(0, 4) = h_1^2 + h_2^2(6 + h_2) \geqslant 0.$$

Donc $(0, 4)$ est un minimum local de f. Mais ce minimum n'est pas global car par exemple :

$$\lim_{y \to -\infty} f(0, y) = \lim_{t \to -\infty} -6y^2 + y^3 = \lim_{y \to -\infty} y^3 = -\infty \leqslant -32 = f(0, 4).$$

$\square$

Exercice d'application 8
Étudier les extrema de la fonction $f : (x, y) \mapsto 27y + 4x^2 - 4x^3 - y^3 + x^4$.

Exercice d'application 9
Étudier les extrema de la fonction $f : (x, y, z) \mapsto 5 + 6x + 4y + 3z^2 - x^3 - 2z^3 - y^4$.