Fiche méthodologique n° 3

Trigonométrer

1 Résoudre une éq. (ou une inéq.) trigonométrique

Une équation ou une inéquation trigonométrique ne fait pas toujours apparaître des valeurs remarquables des fonctions trigonométriques (cosinus, sinus et tangente). Il est donc parfois nécessaire d'utiliser les fonctions trigonométriques réciproques.

Exercice d'application 1
Résoudre l'équation $\exp(\tan(\theta)) = t$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$ en fonction du paramètre $t \in \mathbb{R}$.

Exercice d'application 2
Résoudre l'inéquation $\cos^2(\theta) \geqslant x$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$ en fonction du paramètre $x \in \mathbb{R}$.

2 Déterminer un argument d'un complexe

2.1 À l'aide d'une équation trigonométrique

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe écrit sous forme algébrique avec $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$. Si $z \neq 0$, alors on peut écrire z sous forme exponentielle $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\theta \equiv \arg(z)[2\pi]$. À l'aide de l'écriture trigonométrique de z, on a :

$$z = a + ib = re^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \quad \text{donc} \quad \cos(\theta) = \frac{a}{r} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{b}{r}.$$

Pour déterminer un argument θ de z, il suffit de résoudre une de ces deux équations trigonométriques à l'aide des fonctions trigonométriques réciproques. En pratique, on obtient les arguments suivants :
- si $b \geqslant 0$ alors $\theta = \arccos(a/r)$ est un argument de z ;
- si $b \leqslant 0$ alors $\theta = -\arccos(a/r)$ est un argument de z ;
- si $a \geqslant 0$ alors $\theta = \arcsin(b/r)$ est un argument de z ;
- si $a \leqslant 0$ alors $\theta = \pi - \arcsin(b/r)$ est un argument de z.

Remarque. Deux arguments différents obtenus avec la méthode ci-dessus sont congrus modulo 2π. Par exemple, si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ alors $\arccos(a/r) \equiv \arcsin(b/r)[2\pi]$. Il suffit donc de choisir l'un des deux arguments trouvés.

Remarque. Si $a \neq 0$, on peut également résoudre l'équation $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{b}{a}$ sans avoir besoin de calculer le module r de z. Dans ce cas, on obtient :
- si $a > 0$ alors $\theta = \arctan(b/a)$ est un argument de z ;
- si $a < 0$ alors $\theta = \pi + \arctan(b/a)$ est un argument de z.

Exemple 1
Déterminer un argument du nombre complexe $z = \dfrac{4-2i}{3+i}$.

Solution. On a $z = \frac{4-2i}{3+i} = (4-2i)(\frac{3-i}{10}) = \frac{10-10i}{10} = 1 - i$. Par conséquent $z = re^{i\theta}$ avec $r = \sqrt{2}$ et $\theta = -\arccos(\frac{\mathrm{Re}(z)}{r}) = -\arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{\pi}{4}$ (car $\mathrm{Im}(z) = -1 \leqslant 0$). □

Exercice d'application 3
Calculer $\left(5\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{5} - i(1 + \sqrt{15})}{\sqrt{5} + i}\right)^{42}$.

Exercice d'application 4
Déterminer un argument de $1/(x + i)$ en fonction des valeurs du paramètre $x \in \mathbb{R}$.

2.2 À l'aide d'une factorisation par l'angle moitié

Si $z = e^{i\alpha} + e^{i\beta}$ ou $z = e^{i\alpha} - e^{i\beta}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, il suffit d'utiliser une factorisation par l'angle moitié pour déterminer un argument θ de z :

$$\boxed{e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i(\alpha+\beta)/2}} \quad \text{et} \quad \boxed{e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i(\alpha+\beta)/2}}.$$

Attention. Ces formules n'impliquent pas que $(\alpha + \beta)/2$ est un argument de z. Il est nécessaire de prendre en compte le signe de $\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$ dans la première formule et un argument de $i\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$ dans la deuxième formule.

Exemple 2
Déterminer un argument du nombre complexe $z = e^{5i\pi/6} + e^{-3i\pi/4}$.

Solution. On a d'après une factorisation par l'angle moitié :

$$z = e^{5i\pi/6} + e^{-3i\pi/4} = 2\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}}{2}\right)e^{i(\frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{4})/2} = 2\cos\left(\frac{19\pi}{24}\right)e^{i\pi/24}.$$

Donc $z = re^{i\theta}$ avec $r = -2\cos(\frac{19\pi}{24})$ et $\theta = \frac{\pi}{24} + \pi = \frac{25\pi}{24}$ (car $\cos(\frac{19\pi}{24}) < 0$). □

Exercice d'application 5
Déterminer un argument de $1 - e^{i\theta}$ en fonction des valeurs du paramètre $\theta \in \mathbb{R}$.

3 Simplifier $a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$

Simplifier l'expression $a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, signifie la mettre sous la forme $r\cos(\theta - \varphi)$ avec $r > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. Puisqu'on a :

$$r\cos(\theta - \varphi) = r\cos(\varphi)\cos(\theta) + r\sin(\varphi)\sin(\theta)$$

il suffit de trouver r et φ tels que $r\cos(\varphi)=a$ et $r\sin(\varphi)=b$, donc tels que $re^{i\varphi}=a+ib$. Ainsi, il suffit de poser $r=\sqrt{a^2+b^2}$ et $\varphi\equiv\arg(a+ib)\ [2\pi]$.

Exercice d'application 6
Résoudre l'équation $\cos(\theta)+\sqrt{3}\sin(\theta)=\sqrt{2}$ d'inconnue $\theta\in\mathbb{R}$.

Exercice d'application 7
Résoudre l'inéquation $3\cos(\theta)-4\sin(\theta)\geqslant 1$ d'inconnue $\theta\in\mathbb{R}$.

4 Développer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$

Développer les expressions $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$, où $n\in\mathbb{N}$ et $\theta\in\mathbb{R}$, signifie la mettre sous la forme d'une somme de termes du type $\lambda\cos^p(\theta)\sin^q(\theta)$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ et $(p,q)\in\mathbb{N}^2$. Pour cela, il suffit d'utiliser la formule de Moivre afin d'exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ comme la partie réelle ou imaginaire de $(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n$, ensuite de développer cette expression, puis de ne conserver que la partie réelle ou imaginaire.
Remarque. L'expression finale doit avoir la même parité en tant que fonction de θ que l'expression de départ. Ainsi, puisque $\theta\mapsto\cos(n\theta)$ est paire, son développement ne fera apparaître que des termes du type $\lambda\cos^p(\theta)\sin^q(\theta)$ avec q pair. Et puisque $\theta\mapsto\sin(n\theta)$ est impaire, son développement ne fera apparaître que des termes du type $\lambda\cos^p(\theta)\sin^q(\theta)$ avec q impair.
Remarque. Pour vérifier le résultat, on peut linéariser (voir section suivante) les termes obtenus pour retrouver l'expression de départ.

Exemple 3
Développer $\sin(3\theta)$ pour tout $\theta\in\mathbb{R}$.

Solution. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. On a d'après la formule de Moivre :

$$\begin{aligned}\sin(3\theta)&=\operatorname{Im}\left((e^{i\theta})^3\right)=\operatorname{Im}\left((\cos(\theta)+i\sin(\theta))^3\right)\\&=\operatorname{Im}\left(\cos^3(\theta)+3i\cos^2(\theta)\sin(\theta)-3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-i\sin^3(\theta)\right)\\&=3\cos^2(\theta)\sin(\theta)-\sin^3(\theta).\end{aligned}$$

□

Exercice d'application 8
Développer $\cos(4\theta)$ pour tout $\theta\in\mathbb{R}$ et en déduire la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{16})$.

5 Linéariser $\cos^p(\theta)\sin^q(\theta)$

Linéariser l'expression $\cos^p(\theta)\sin^q(\theta)$, où $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ et $\theta\in\mathbb{R}$, signifie la mettre sous la forme d'une somme de termes du type $\lambda\cos(n\theta)$ ou $\lambda\sin(n\theta)$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$. Pour cela, il suffit d'utiliser les formules d'Euler afin de remplacer $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ par des exponentielles complexes dans l'expression $\cos^p(\theta)\sin^q(\theta)$, ensuite de développer, puis de regrouper les exponentielles complexes du type $e^{in\theta}$ avec celles du type $e^{-in\theta}$ où $n\in\mathbb{N}$ et enfin de réutiliser les formules d'Euler afin de faire apparaitre les termes du type $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$.
Remarque. Comme pour le développement, l'expression finale doit avoir la même parité en tant que fonction de θ que l'expression de départ. Ainsi, si q est pair alors $\theta\mapsto\cos^p(\theta)\sin^q(\theta)$ est paire donc sa linéarisation ne fera apparaître que des termes du type $\cos(n\theta)$. Et si q est impair alors $\theta\mapsto\cos^p(\theta)\sin^q(\theta)$ est impaire donc sa linéarisation ne fera apparaître que des termes du type $\sin(n\theta)$.
Remarque. Pour vérifier le résultat, on peut développer (voir section précédente) les termes obtenus pour retrouver l'expression de départ.

Exemple 4
Linéariser $\cos(\theta)\sin^2(\theta)$ pour tout $\theta\in\mathbb{R}$.

Solution. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. On a d'après les formules d'Euler :

$$\begin{aligned}\cos(\theta)\sin^2(\theta)&=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2=-\frac{1}{8}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\left(e^{2i\theta}-2+e^{-2i\theta}\right)\\&=-\frac{1}{8}\left(e^{3i\theta}-2e^{i\theta}+e^{-i\theta}+e^{i\theta}-2e^{-i\theta}+e^{-3i\theta}\right)=-\frac{1}{8}\left(\left(e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}\right)-\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right)\\&=-\frac{1}{8}\left(2\cos(3\theta)-2\cos(\theta)\right)=-\frac{1}{4}\cos(3\theta)+\frac{1}{4}\cos(\theta).\end{aligned}$$

□

Exercice d'application 9
Déterminer une primitive de la fonction $\theta\mapsto\sin^3(\theta)$.

6 Transformer un produit en somme

Pour transformer un produit de cosinus ou sinus en somme, il suffit d'utiliser les formules d'Euler comme pour la linéarisation.

Exercice d'application 10
Déterminer une primitive de la fonction $\theta\mapsto\cos(2\theta+1)\sin(3\theta-1)$.

7 Transformer une somme en produit

Pour transformer une somme de cosinus ou sinus en produit, il suffit d'écrire cette somme comme la partie réelle ou imaginaire d'une somme d'exponentielles complexes, ensuite d'utiliser les formules de factorisation par l'angle moitié, puis de ne conserver que la partie réelle ou imaginaire.

Exercice d'application 11
Résoudre l'équation $\cos(2\theta+\frac{\pi}{5})+\cos(3\theta-\frac{\pi}{4})=0$ d'inconnue $\theta\in\mathbb{R}$.

Exercice d'application 12
Résoudre l'inéquation $\cos(5\theta/2)\geqslant\sin(\theta/2)$ d'inconnue $\theta\in\mathbb{R}$.