Fiche méthodologique n° 4

Manipuler des suites

1 Calculer le terme général d'une suite récurrente

1.1 Cas d'une suite arithmético-géométrique

Soit $(q, r) \in \mathbb{C}^2$. On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ définie par la donnée de son premier terme $u_{n_0} \in \mathbb{C}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \boxed{u_{n+1} = qu_n + r}.$$

Pour calculer une expression de u_n en fonction de $n \geqslant n_0$, on distingue plusieurs cas.
Suite arithmétique (de raison r) : si $q = 1$ alors

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \boxed{u_n = u_{n_0} + r(n - n_0)}.$$

Suite géométrique (de raison q) : si $r = 0$ alors

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \boxed{u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}}.$$

Suite arithmético-géométrique : si $q \neq 1$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \ u_n = \alpha + (u_{n_0} - \alpha)q^{n-n_0}.$$

Pour retrouver cette formule, il suffit de chercher $\alpha \in \mathbb{C}$ comme étant un «point fixe» de la relation de récurrence, c'est-à-dire tel que $\boxed{\alpha = q\alpha + r}$ (on obtient alors $\alpha = \frac{r}{1-q}$). Par soustraction des deux relations, on obtient pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\begin{array}{rcrl} u_{n+1} & = & qu_n & + r \\ -(\quad \alpha & = & q\alpha & + r \ ) \\ \hline (u_{n+1} - \alpha) & = & q(u_n - \alpha) & \end{array}$$

Par conséquent, $(u_n - \alpha)_{n \geqslant n_0}$ est une suite géométrique de raison q et on a :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \boxed{(u_n - \alpha) = (u_{n_0} - \alpha)q^{n-n_0}}$$

ce qui permet de retrouver l'expression de u_n en fonction de $n \geqslant n_0$.
Remarque. Si $u_{n_0} = \alpha$ alors on peut démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est constante égale à α. De même si $u_{n_1} = \alpha$ pour un certain $n_1 \geqslant n_0$, alors $u_n = \alpha$ pour tout $n \geqslant n_1$. C'est pour cette raison que α est appelé «point fixe».

Exemple 1
Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0, \ u_{n+1} = 3u_n + 2$. Calculer u_{42}.

Solution. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = 3\alpha + 2$, c'est-à-dire $\alpha = -1$. On a pour tout $n \geqslant 0$: $(u_{n+1} - \alpha) = (3u_n + 2) - (3\alpha + 2) = 3(u_n - \alpha)$ donc la suite $(u_n - \alpha)_{n \geqslant 0}$ est géométrique de raison 3. D'où $(u_n - \alpha) = (u_0 - \alpha)3^n$ pout tout $n \geqslant 0$. En reportant $u_0 = 1$ et $\alpha = -1$ on obtient pour $n = 42$: $u_{42} = 2 \times 3^{42} - 1$. □

Exercice d'application 1
Soit $(u_n)_{n \geqslant -1}$ la suite définie par $u_{-1} = -1$ et $\forall n \geqslant -1, \ u_{n+1} = 2u_n + 3$. Calculer la somme des quarante-deux premiers termes de $(u_n)_{n \geqslant -1}$.

1.2 Cas d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ définie par la donnée de ses deux premiers termes $(u_{n_0}, u_{n_0+1}) \in \mathbb{R}^2$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \boxed{u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n}.$$

Pour calculer une expression de u_n en fonction de $n \geqslant n_0$, on commence par résoudre l'équation caractéristique associée d'inconnue $q \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{q^2 = aq + b}. \tag{C}$$

C'est une équation du second degré à coefficients réels, on distingue donc trois cas selon le signe du discriminant $\Delta = a^2 + 4b$.
Si $\Delta > 0$: (C) admet deux solutions réelles distinctes qu'on note q_1 et q_2. Alors il existe deux constantes $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ telles que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \boxed{u_n = \lambda_1 q_1^{n-n_0} + \lambda_2 q_2^{n-n_0}}.$$

Si $\Delta = 0$: (C) admet une seule solution réelle (double) qu'on note q_0. Alors il existe deux constantes $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ telles que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \boxed{u_n = (\lambda + \mu(n - n_0))q_0^{n-n_0}}.$$

Si $\Delta < 0$: (C) admet deux solutions complexes conjuguées distinctes qu'on note $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$. Alors il existe deux constantes $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ telles que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \boxed{u_n = \rho^{n-n_0}(A\cos((n - n_0)\theta) + B\sin((n - n_0)\theta))}.$$

Conseil. Pour déterminer les constantes $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ou $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ selon le cas considéré, il suffit d'écrire les expressions de u_n pour $n = n_0$ et $n = n_0 + 1$ puis de résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues.
Remarque. On peut remplacer $n - n_0$ par n dans l'expression de u_n. Le système linéaire (plus difficile à résoudre) donnera des valeurs de constantes différentes, mais l'expression finale de u_n sera identique (après simplifications).

Exercice d'application 2
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_1 = u_2 = 1$ et $\forall n \geqslant 1,\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$. Calculer u_{42}.

Exercice d'application 3
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Calculer la somme des quarante-deux premiers termes de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice d'application 4
Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ définies par $a_1 = b_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 1, \begin{cases} a_{n+1} = a_n - b_n \\ b_{n+1} = a_n + 3b_n \end{cases}$.
Exprimer les termes a_n et b_n en fonction de $n \geqslant 1$.

2 Étudier une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ définie par la donnée de son premier terme $u_{n_0} \in \mathbb{R}$ et une relation de récurrence du type :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = f(u_n)$$

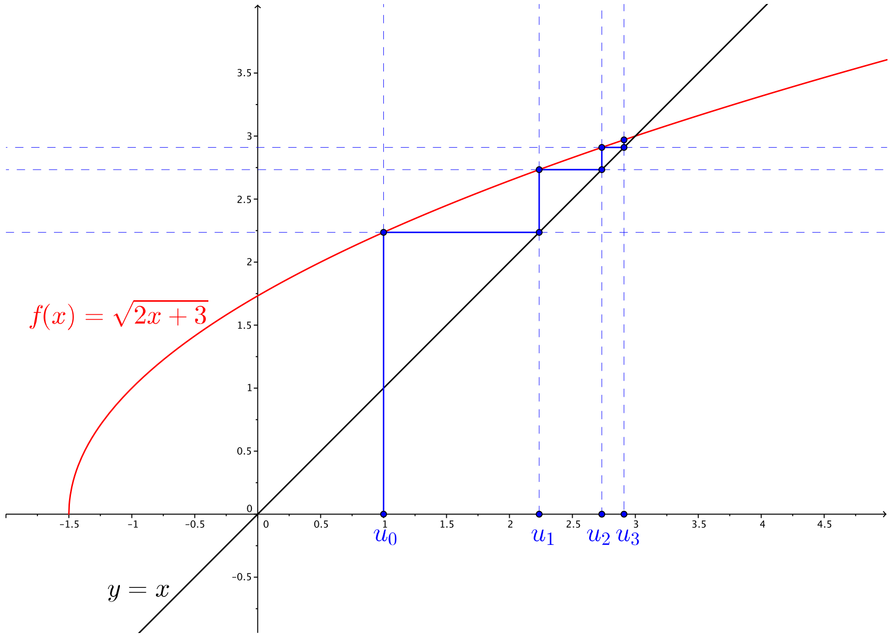
où f est une fonction réelle définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
Pour étudier $(u_n)_{n\geqslant n_0}$, on commence par étudier les variations de f sur I ainsi que le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ afin de pouvoir tracer sur un même graphique la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$. On représente alors graphiquement les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ à l'aide de l'algorithme suivant :

- on repère u_{n_0} sur l'axe des abscisses ;
- on place le point d'intersection de la verticale d'équation $x = u_{n_0}$ avec la courbe représentative de f, ce point a pour coordonnées $(u_{n_0}, f(u_{n_0})) = (u_{n_0}, u_{n_0+1})$;
- on trace le point d'intersection de l'horizontale d'équation $y = u_{n_0+1}$ avec la droite d'équation $y = x$, ce point a pour coordonnées (u_{n_0+1}, u_{n_0+1}) ;
- on reporte u_{n_0+1} sur l'axe des abscisses ;
- on réitère le procédé pour obtenir u_{n_0+2}, u_{n_0+3}, u_{n_0+4}, u_{n_0+5}, etc.

Après avoir observé suffisamment de termes, on peut conjecturer graphiquement des propriétés de $(u_n)_{n\geqslant n_0}$: existence de majorant ou de minorant, monotonie, expression du terme général, etc. Enfin on démontre ces conjectures, le plus souvent par récurrence.
Conseil. La première propriété à démontrer est souvent que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est bien définie, c'est-à-dire que $u_n \in I$ pour tout $n \geqslant n_0$ afin que le terme suivant u_{n+1} soit bien défini par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ (on rappele que la fonction f est définie sur I).
Attention. La suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ n'a pas forcément la même monotonie que la fonction f !

Exemple 2
Étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

Solution. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x+3}$ est définie sur $I = [-\frac{3}{2}, +\infty[$ et dérivable sur $]-\frac{3}{2}, +\infty[$ avec $f' : x \mapsto 2/(2\sqrt{2x+3}) > 0$ donc f est strictement croissante sur I. On étudie de même la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ et on obtient que g est strictement croissante sur $[-\frac{3}{2}, -1]$ et strictement décroissante sur $[-1, +\infty[$. De plus, $g(-\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$ et «$g(x) = 0 \iff x = 3$» donc g est strictement positive sur $[-\frac{3}{2}, 3[$ et strictement négative sur $]3, +\infty[$. Ainsi, la courbe représentative de f est au-dessus de la droite d'équation $y = x$ sur $[-\frac{3}{2}, 3]$ et au-dessous sur $[-3, +\infty[$. On peut maintenant représenter graphiquement les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ (voir ci-dessous).



On conjecture que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie (c'est-à-dire que $u_n \in [-\frac{3}{2}, +\infty[$ pour tout $n \geqslant 0$), majorée par 3 et strictement croissante. On raisonne par récurrence pour démontrer que $-\frac{3}{2} \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 3$ pour tout $n \geqslant 0$.
Initialisation. On a $u_0 = 1 > -\frac{3}{2}$ et $u_1 = f(u_0) = \sqrt{5} \in]1, 3[$ donc $-\frac{3}{2} \leqslant u_0 < u_1 \leqslant 3$.
Hérédité. On suppose que $-\frac{3}{2} \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 3$ pour un entier $n \geqslant 0$ fixé. Puisque f est strictement croissante sur $I = [-\frac{3}{2}, +\infty[$, on obtient $f(-\frac{3}{2}) \leqslant f(u_n) < f(u_{n+1}) \leqslant f(3)$. Or $f(-\frac{3}{2}) = 0$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(3) = 3$, donc $0 \leqslant u_{n+1} < u_{n+2} \leqslant 3$. On en déduit bien que $-\frac{3}{2} \leqslant u_{n+1} < u_{n+2} \leqslant 3$ car $-\frac{3}{2} < 0$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a démontré que $-\frac{3}{2} \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 3$ pour tout $n \geqslant 0$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie, majorée par 3 et strictement croissante. □

Exercice d'application 5
Étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_1 = 3$ et $\forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = (u_n^2 - 2u_n + 4)/3$.

Exercice d'application 6
Étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = 1/(1 + u_n)$.