Fiche méthodologique n° 5

Sommer et multiplier

1 Utiliser les sommes usuelles

Voici quelques sommes usuelles à connaître par cœur car on les utilise fréquemment. Il faut savoir les repérer très vite dans les calculs de sommes.

1.1 Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit $(u_k)_{k\geqslant k_0}$ une suite arithmétique. Pour tout $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $k_0\leqslant m\leqslant n$, la somme des termes de $(u_k)_{k\geqslant k_0}$ entre u_m et u_n est égale à :

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} u_k=(n-m+1)\frac{u_m+u_n}{2}}.$$

Remarque. Le facteur $(n-m+1)$ correspond au nombre de termes dans la somme.

Exercice d'application 1
Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer la somme des n premiers entiers naturels pairs non nuls, puis celle des n premiers entiers naturels impairs.

1.2 Somme des termes d'une suite géométrique

Soit $(u_k)_{k\geqslant k_0}$ une suite géométrique de raison $q\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Pour tout $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $k_0\leqslant m\leqslant n$, la somme des termes de $(u_k)_{k\geqslant k_0}$ entre u_m et u_n est égale à :

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} u_k=u_m\frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}}.$$

Attention. Si $q=1$, la suite $(u_k)_{k\geqslant k_0}$ est constante égale à u_m et par conséquent $\sum_{k=m}^n u_k=(n-m+1)u_m$. Il est donc nécessaire de distinguer le cas où $q=1$.

Exemple 1
Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^n\cos(k\theta)$ pour tout $\theta\in\mathbb{R}$.

Solution. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Re}\left(e^{ik\theta}\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i\theta}\right)^k\right).$$

Si $e^{i\theta}=1$, c'est-à-dire si $\theta\equiv 0\ [2\pi]$, on obtient : $\sum_{k=0}^n\cos(k\theta)=n+1$. Si $\theta\not\equiv 0\ [2\pi]$, on obtient en factorisant par l'angle moitié :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)&=\mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{2i\sin\left(-(n+1)\theta/2\right)e^{i(n+1)\theta/2}}{2i\sin\left(-\theta/2\right)e^{i\theta/2}}\right)\\&=\mathrm{Re}\left(\frac{\sin\left((n+1)\theta/2\right)}{\sin\left(\theta/2\right)}e^{in\theta/2}\right)=\frac{\sin\left((n+1)\theta/2\right)}{\sin\left(\theta/2\right)}\cos\left(n\theta/2\right).\end{aligned}$$

□

Exercice d'application 2
Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^n\sin(k\theta)$ pour tout $\theta\in\mathbb{R}$.

1.3 Formule du binôme de Newton

On a pour tout $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ et tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}=(a+b)^n}.$$

Remarque. En particulier, on a $\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}=2^n$ et $\sum_{k=0}^n(-1)^k\binom{n}{k}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$.

Exemple 2
Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\cos(k\theta)$ pour tout $\theta\in\mathbb{R}$.

Solution. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{Re}\left(e^{ik\theta}\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{i\theta}\right)^k1^{n-k}\right)=\mathrm{Re}\left(\left(e^{i\theta}+1\right)^n\right).$$

Puis, on obtient en factorisant par l'angle moitié :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)=\mathrm{Re}\left(\left(2\cos\left(\theta/2\right)e^{i\theta/2}\right)^n\right)=2^n\cos^n\left(\theta/2\right)\cos\left(n\theta/2\right).$$

□

Exercice d'application 3
Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\sin(k\theta)$ pour tout $\theta\in\mathbb{R}$.

1.4 Sommes des premières puissances d'entiers

Pour tout $p\in\mathbb{N}^\star$ et tout $n\in\mathbb{N}^\star$, la somme des n premières puissances p-ièmes d'entiers est la somme $\sum_{k=1}^n k^p$. Il existe une formule générale (très compliquée) pour l'exprimer comme une expression polynomiale de degré $p+1$ en n. Il faut connaître les expressions de cette formule pour les cas $p=1$, $p=2$ et $p=3$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}},\quad\boxed{\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}\quad\text{et}\quad\boxed{\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}}.$$

Conseil. Le cas $p=1$ se retrouve avec la formule d'une somme des termes d'une suite arithmétique, et le cas $p=3$ se retrouve en retenant que $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$.

Exemple 3
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer la somme des n premiers carrés d'entiers naturels pairs non nuls, puis celle des n premiers carrés d'entiers naturels impairs.

Solution. La première somme vaut :

$$\sum_{k=1}^n (2k)^2 = \sum_{k=1}^n 4k^2 = 4\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

La deuxième somme vaut :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^2 &= \sum_{k=0}^{n-1}(4k^2+4k+1) = 4\sum_{k=0}^{n-1}k^2 + 4\sum_{k=0}^{n-1}k + \sum_{k=0}^{n-1}1\\ &= \frac{4(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6} - \frac{4(n-1)((n-1)+1)}{2} + n\\ &= \cdots = \frac{n(4n^2-1)}{3}.\end{aligned}$$

□

Exercice d'application 4
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer la somme des n premiers cubes d'entiers naturels pairs non nuls, puis celle des n premiers cubes d'entiers naturels impairs.

2 Manipuler des sommes

Voici quelques méthodes à connaître pour simplifier les calculs de sommes. Dans cette section, $(u_k)_{k\geqslant k_0}$ désigne une suite numérique quelconque.

2.1 Décalage d'indice

Pour tout $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $k_0 \leqslant m \leqslant n$ et tout $p\in\mathbb{Z}$, on a :

$$\sum_{k=m}^n u_k = \sum_{\ell=m+p}^{n+p} u_{\ell-p} \quad (\text{en posant } \ell = k+p).$$

Attention. Il ne faut pas oublier de changer les bornes de sommation.

Exercice d'application 5
Pour tout $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ et tout $n\in\mathbb{N}^\star$, démontrer l'égalité de Bernoulli :

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

2.2 Inversion de l'ordre de sommation

Pour tout $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $k_0 \leqslant m \leqslant n$, on a :

$$\sum_{k=m}^n u_k = \sum_{\ell=1}^{n-m+1} u_{n+1-\ell} \quad (\text{en posant } \ell = n+1-k).$$

Remarque. En particulier, on retrouve la somme des n premiers entiers en écrivant $S = \sum_{k=1}^n k = \sum_{\ell=1}^n (n+1-\ell) = n(n+1) - S$ donc $S = n(n+1)/2$.
Conseil. L'inversion de l'ordre de sommation permet souvent d'exprimer une somme S en fonction d'elle-même afin d'obtenir sa valeur comme solution d'une équation.

Exercice d'application 6

Soit n un entier naturel impair. Calculer $S = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{(-1)^k}{k(n-k)}$.

2.3 Sommes télescopiques

Pour tout $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $k_0 \leqslant m \leqslant n$, on a :

$$\sum_{k=m}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m.$$

Conseil. On retrouve ce résultat en écrivant tous les termes de la somme puis en simplifiant les termes qui se «télescopent» (tous les termes sauf $-u_m$ et u_{n+1}).

Exemple 4
Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum_{k=1}^n \left[(k+1)^4 - k^4\right]$ de deux manières différentes puis retrouver la formule de la somme des n premiers cubes d'entiers.

Solution. On a d'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=1}^n \left[(k+1)^4 - k^4\right] = \sum_{k=1}^n \left[4k^3 + 6k^2 + 4k + 1\right] = 4\sum_{k=1}^n k^3 + 6\sum_{k=1}^n k^2 + 4\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1.$$

D'autre part, on a en reconnaissant une somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^n \left[(k+1)^4 - k^4\right] = (n+1)^4 - 1.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - 1 - 6\sum_{k=1}^n k^2 - 4\sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} - n\right)\\ &= \cdots = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.\end{aligned}$$

□

Exercice d'application 7
Calculer $\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^5-k^5\right]$ de deux manières différentes puis obtenir la formule de la somme des n premières puissances quatrièmes d'entiers.

2.4 Séparation des indices pairs et impairs

Pour tout $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $k_0\leqslant m\leqslant n$, on a :

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n}u_k=\sum_{\substack{k=m\\k\text{ pair}}}^{n}u_k+\sum_{\substack{k=m\\k\text{ impair}}}^{n}u_k=\sum_{\frac{m}{2}\leqslant\ell\leqslant\frac{n}{2}}u_{2\ell}+\sum_{\frac{m-1}{2}\leqslant\ell\leqslant\frac{n-1}{2}}u_{2\ell+1}}.$$

Remarque. Si $m=0$, on peut aussi écrire $\sum_{k=0}^{n}u_k=\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor}u_{2\ell}+\sum_{\ell=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}u_{2\ell+1}$.

Exemple 5
Soit $n\in\mathbb{N}$. Développer $\cos(n\theta)$ pour tout $\theta\in\mathbb{R}$.

Solution. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. On a d'après les formules de Moivre et du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}\cos(n\theta)&=\mathrm{Re}\Big((\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n\Big)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}(\theta)i^k\sin^k(\theta)\right)\\&=\sum_{\substack{k=0\\k\text{ pair}}}^{n}i^k\binom{n}{k}\cos^{n-k}(\theta)\sin^k(\theta)=\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^\ell\binom{n}{2\ell}\cos^{n-2\ell}(\theta)\sin^{2\ell}(\theta).\end{aligned}$$

□

Exercice d'application 8
Soit $n\in\mathbb{N}$. Développer $\sin(n\theta)$ pour tout $\theta\in\mathbb{R}$.

3 Calculer des sommes doubles

Soit $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ une famille quelconque de nombres où $(n,p)\in(\mathbb{N}^\star)^2$.

3.1 Sommes doubles sur un rectangle d'indices

Dans le cas où on calcule une somme double sur un rectangle d'indices, alors on peut intervertir les symboles $\sum$, c'est-à-dire :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}a_{i,j}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p}a_{i,j}\right)=\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}\right).$$

Remarque. Si les indices sont séparables, c'est-à-dire si on peut écrire $a_{i,j}=b_ic_j$ pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, alors $\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}a_{i,j}=(\sum_{i=1}^{n}b_i)(\sum_{j=1}^{p}c_j)$.

Exercice d'application 9
Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}(i+j)$.

3.2 Sommes doubles sur un triangle d'indices

Dans le cas où on calcule une somme double sur un triangle d'indices (avec $n=p$), alors il faut faire attention lorsqu'on veut intervertir les symboles $\sum$:

$$\boxed{\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}a_{i,j}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n}a_{i,j}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}a_{i,j}\right)}.$$

Conseil. En pratique, il est plus facile de travailler avec des sommes dont les indices ont la même valeur initiale fixée. Il est donc préférable d'utiliser la deuxième expression.

Exercice d'application 10
Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i/j)$.

3.3 Sommes doubles sur un carré d'indices

Dans le cas où on calcule une somme double sur un carré d'indices (avec $n=p$), on peut utiliser la décomposition suivante :

$$\boxed{\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}a_{i,j}=\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}a_{i,j}+\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}a_{i,j}-\sum_{k=1}^{n}a_{k,k}}.$$

Remarque. Si les indices sont symétriques, c'est-à-dire si on a $a_{i,j}=a_{j,i}$ pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, alors $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}a_{i,j}=2\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}a_{i,j}-\sum_{k=1}^{n}a_{k,k}$.

Exemple 6
Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\min\{i,j\}$ de deux manières différentes puis retrouver la formule de la somme des n premiers carrés d'entiers.

Solution. On a en sommant sur le rectangle :

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\min\{i,j\}&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min\{i,j\}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}j+\sum_{j=i+1}^{n}i\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2}+(n-i)i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}i^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)i\right)\\&=-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\left(\frac{2n+1}{2}\right)\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

De plus, on a en sommant sur deux triangles et en soustrayant la diagonale :

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\min\{i,j\} &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\min\{i,j\}+\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}\min\{i,j\}-\sum_{k=1}^{n}\min\{k,k\}\\ &= 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i-\sum_{k=1}^{n}k = 2\sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \sum_{j=1}^{n}j^2+\sum_{j=1}^{n}j-\frac{n(n+1)}{2}=\sum_{k=1}^{n}k^2.\end{aligned}$$

On retrouve bien la formule $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. □

Exercice d'application 11
Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} ij$ de deux manières différentes puis retrouver la formule de la somme des n premiers cubes d'entiers.

4 Manipuler des factorielles et des coeff. binomiaux

4.1 Factorielle

La factorielle de $n\in\mathbb{N}$ est définie comme le produit des n premiers entiers non nuls, c'est-à-dire :

$$\boxed{n!=\prod_{k=1}^{n}k}.$$

Exercice d'application 12
Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer le produit des n premiers entiers naturels pairs non nuls, puis celui des n premiers entiers naturels impairs.

4.2 Coefficients binomiaux

Le coefficient binomial de $k\in\mathbb{Z}$ parmi $n\in\mathbb{N}$ est défini par :

$$\boxed{\binom{n}{k}=\begin{cases}\frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0\leqslant k\leqslant n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}.$$

Remarque. D'après la formule du binôme de Newton, c'est le coefficient de X^k dans le développement du polynôme $(X+1)^n$. En particulier, $\binom{n}{k}$ est un entier naturel.
Les coefficients binomiaux vérifient de nombreuses propriétés. Il faut connaître les trois suivantes car on les utilise fréquemment.

— Symétrie :

$$\forall (k,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N},\quad \boxed{\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}}.$$

— Formule du pion :

$$\forall (k,n)\in\mathbb{Z}^\star\times\mathbb{N}^\star,\quad \boxed{\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}}.$$

— Relation de Pascal :

$$\forall (k,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^\star,\quad \boxed{\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}}.$$

Remarque. La dernière propriété permet de calculer facilement les coefficients binomiaux par récurrence à l'aide du triangle de Pascal.

Exemple 7
Soit $(m,n)\in\mathbb{N}^2$. En développant le polynôme $(X+1)^m(X+1)^n=(X+1)^{m+n}$, démontrer l'identité de Vandermonde :

$$\forall k\in[\![0,m+n]\!],\ \sum_{\ell=0}^{k}\binom{m}{\ell}\binom{n}{k-\ell}=\binom{m+n}{k}.$$

Solution. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned}(X+1)^m(X+1)^n &= \left(\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}X^j\right)=\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant m\\0\leqslant j\leqslant n}}\binom{m}{i}\binom{n}{j}X^{i+j}\\ &= \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant m\\0\leqslant j\leqslant n\\ i+j=k}}\binom{m}{i}\binom{n}{j}\right)X^k=\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i=0}^{m}\sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ i+j=k}}\binom{m}{i}\binom{n}{j}\right)X^k\\ &= \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}\right)X^k=\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{\ell=0}^{k}\binom{m}{\ell}\binom{n}{k-\ell}\right)X^k.\end{aligned}$$

Or, toujours d'après la formule du binôme de Newton, le coefficient de X^k pour chaque $k\in[\![0,m+n]\!]$ dans le développement de $(X+1)^{m+n}$ est $\binom{m+n}{k}$. On en déduit la formule de Vandermonde par identification des coefficients de polynômes. □

Exercice d'application 13
Soit $n\in\mathbb{N}$. En développant le polynôme $(X+1)^{2n}(X-1)^{2n}=(X^2-1)^{2n}$, démontrer que $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^2=(-1)^n\binom{2n}{n}$.