Fiche méthodologique n° 6

Étudier des applications

Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles E et F.

1 Étudier l'injectivité d'une application

1.1 À l'aide d'une équation

Pour montrer que $f : E \to F$ est injective, il suffit de prouver que chaque élément de F admet au plus un antécédent dans E par f. Autrement dit, il suffit de prouver que pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet au plus une solution.

Inversement, s'il existe au moins un $y \in F$ tel que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet au moins deux solutions alors $f : E \to F$ n'est pas injective.

Exercice d'application 1
Étudier l'injectivité de l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (a, b) \mapsto (a + b, a - b, b - a)$.

Exercice d'application 2
Étudier l'injectivité de l'application $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z - \overline{z}$.

1.2 À l'aide de la définition

Si l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ est trop compliquée à résoudre pour tout $y \in F$, on peut utiliser la définition de l'injectivité. Ainsi, pour montrer que $f : E \to F$ est injective, il suffit de prouver la proposition suivante :

$$\boxed{\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2}.$$

On commence donc par fixer deux éléments quelconques de E, on suppose qu'ils ont même image par f puis on démontre que ces deux éléments sont égaux.

Inversement, pour montrer que $f : E \to F$ n'est pas injective, il suffit de trouver deux éléments distincts de E qui ont même image par f.

Exercice d'application 3
Étudier l'injectivité de l'application $\Phi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, g \mapsto g(0)$.

Exercice d'application 4
Étudier l'injectivité de l'application qui à une suite réelle $(u_n)_{n \geqslant 0}$ associe la suite réelle $(U_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $U_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1,\ U_n = u_{n-1}$.

1.3 Cas d'une fonction réelle d'une variable

Si f est une fonction réelle définie sur $D \subset \mathbb{R}$ et si f est strictement monotone sur D alors l'application $f : D \to \mathbb{R}$ est injective. Ainsi, pour étudier l'injectivité d'une fonction réelle d'une variable, il suffit de dresser son tableau des variations.

Exercice d'application 5
Étudier l'injectivité de l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 + 3x^2 + 6x + 1$.

Exercice d'application 6
Étudier l'injectivité de la fonction tangente sur son ensemble de définition.

2 Étudier la surjectivité d'une application

2.1 À l'aide d'une équation

Pour montrer que $f : E \to F$ est surjective, il suffit de prouver que chaque élément de F admet au moins un antécédent dans E par f. Autrement dit, il suffit de prouver que pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet au moins une solution.

Inversement, s'il existe au moins un $y \in F$ tel que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ n'admet aucune solution alors $f : E \to F$ n'est pas surjective.

Exercice d'application 7
Étudier la surjectivité de l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, a \mapsto (a, -a)$.

Exercice d'application 8
Étudier la surjectivité de l'application $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\star, z \mapsto e^z$.

2.2 À l'aide de la définition

Si l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ est trop compliquée à résoudre pour tout $y \in F$, on peut utiliser la définition de la surjectivité. Ainsi, pour montrer que $f : E \to F$ est surjective, il suffit de prouver la proposition suivante :

$$\boxed{\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y}.$$

On commence donc par fixer un élément quelconque de F puis on cherche (par analyse-synthèse) un antécédent dans E de cet élément par f

Inversement, pour montrer que $f : E \to F$ n'est pas surjective, il suffit de trouver un élément de F qui n'admet aucun antécédent dans E par f.

Exercice d'application 9
Étudier la surjectivité de l'application $\Phi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, g \mapsto g(0)$.

Exercice d'application 10
Étudier la surjectivité de l'application qui à une suite réelle $(u_n)_{n \geqslant 0}$ associe la suite réelle $(U_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $U_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1,\ U_n = u_{n-1}$.

2.3 Cas d'une fonction réelle d'une variable

Si f est une fonction réelle définie sur $D \subset \mathbb{R}$ alors l'application $f : D \mapsto f(D)$ est surjective. Pour déterminer l'image directe $f(D)$, il suffit de dresser le tableau des variations de f.

Exercice d'application 11
Étudier la surjectivité de l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 + 6x^2 + 9x + 5$.

Exercice d'application 12
Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^x + e^{-x}$ réalise une surjection de son ensemble de définition vers un ensemble à déterminer.

3 Étudier la bijectivité d'une application

3.1 À l'aide d'une équation

Pour montrer que $f : E \to F$ est bijective, il suffit de prouver que chaque élément de F admet exactement un antécédent dans E par f. Autrement dit, il suffit de prouver que pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet une seule solution.

Inversement, s'il existe au moins un $y \in F$ tel que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ n'admet aucune solution ou admet au moins deux solutions alors $f : E \to F$ n'est pas bijective.

Exercice d'application 13
Étudier la bijectivité de l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2x + 3y, 3x + 2y)$.

Exercice d'application 14
Étudier la bijectivité de l'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (y - z, x - z, x - y)$.

3.2 À l'aide de la définition

Si l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ est trop compliquée à résoudre pour tout $y \in F$, on peut utiliser les définitions d'injectivité et de surjectivité. Ainsi, pour montrer que $f : E \to F$ est bijective, il suffit de prouver qu'elle est injective <u>et</u> surjective.

Inversement, pour montrer que $f : E \to F$ n'est pas bijective, il suffit de prouver qu'elle n'est pas injective <u>ou</u> qu'elle n'est pas surjective.

Exercice d'application 15
Étudier la bijectivité de l'application $\Psi : \mathbb{R}^\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\mathbb{R}, g \mapsto (\Psi(g) : x \mapsto g(2x))$.

Exercice d'application 16
Soit A une partie de E distincte de E, c'est-à-dire $A \subset E$ et $\exists e \in E,\ e \notin A$. Étudier la bijectivité de l'application $\chi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E), B \mapsto A \cap B$.

3.3 En utilisant le théorème de la bijection

Si f est une fonction réelle <u>continue</u> et <u>strictement monotone</u> sur un <u>intervalle</u> $I \subset \mathbb{R}$ alors l'application $f : I \to f(I)$ est bijective et l'image directe $f(I)$ est un intervalle dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I.

Ainsi, pour étudier la bijectivité d'une fonction réelle d'une variable, il suffit de dresser son tableau des variations.

Exercice d'application 17
Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - x$ réalise une bijection de son ensemble de définition vers un ensemble à déterminer.

Exercice d'application 18
Montrer que la restriction de la fonction $f : x \mapsto 1/(x - \ln(x))$ de l'intervalle $]0, 1[$ vers un ensemble à déterminer est bijective.

Exercice d'application 19
Étudier la bijectivité de l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}, x \mapsto (x + 2)/(x - 1)$.

4 Déterminer une bijection réciproque

4.1 À l'aide d'une équation

Si $f : E \to F$ est bijective, sa bijection réciproque est l'application $f^{-1} : F \to E$ qui associe à chaque élément de F son unique antécédent dans E par f. Autrement dit, si l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet une seule solution pour tout $y \in F$, alors $f : E \to F$ est bijective et sa bijection réciproque $f^{-1} : F \to E$ s'obtient en associant à chaque $y \in F$ l'unique solution $x \in E$ obtenue.

Exercice d'application 20
Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (3x + 2y, 4x + 3y)$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice d'application 21
Montrer que l'application $h : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C} \setminus \{i\}, z \mapsto (1 + iz)/(z - 1)$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice d'application 22
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^\star$. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}_+^\star, x \mapsto x^\alpha$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

4.2 En tant qu'application inverse

Si l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ est trop compliquée à résoudre pour tout $y \in F$, on peut chercher la bijection réciproque comme étant l'application inverse. Autrement dit, s'il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$,

alors $f : E \to F$ est bijective et $g : F \to E$ est sa bijection réciproque $f^{-1} = g : F \to E$.
Remarque. En particulier, l'application inverse $g : F \to E$ est forcément unique.
Conseil. Pour trouver l'application inverse $g : F \to E$, on peut raisonner par analyse-synthèse.

Exercice d'application 23
On considère l'application χ qui à une partie de E associe son complémentaire dans E. Calculer $\chi \circ \chi$ et en déduire que l'application $\chi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ est bijective.

Exercice d'application 24
Montrer que l'application $\Psi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, g \mapsto (\Psi(g) : x \mapsto g(x+1))$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

4.3 En reconnaissant une composition de plusieurs bijections

Si $f : E \to F$ peut s'écrire comme la composée de plusieurs applications bijectives, de la forme $f = f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ (où $n \geqslant 2$), alors $f : E \to F$ est bijective et sa bijection réciproque $f^{-1} : F \to E$ s'obtient à l'aide de la formule :

$$\boxed{\left(f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1\right)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ \cdots \circ f_n^{-1}}.$$

Attention. Pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, il est nécessaire de déterminer l'ensemble de départ E_k et d'arrivée F_k de l'application $f_k : E_k \to F_k$ et de justifier qu'elle est bijective.

Exemple 1
Montrer que la fonction $f : x \mapsto (\pi - 2\arctan(x))/(\pi + 2\arctan(x))$ réalise une bijection sur son ensemble de définition dont on déterminera l'ensemble d'arrivée et sa bijection réciproque.

Solution. On pose $f_1 : x \mapsto \arctan(x)$ et $f_2 : x \mapsto (\pi - 2x)/(\pi + 2x)$. Ainsi $f = f_2 \circ f_1$. On sait que $f_1 : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ est bijective. De plus, f_2 est dérivable (donc continue) sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ et on a :

$$\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[,\ f_2'(x) = \frac{-4\pi}{(\pi + 2x)^2} < 0.$$

Ainsi f_2 est strictement décroissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$. De plus :

$$\lim_{x \to -\pi/2} f_2(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\pi/2} f_2(x) = 0.$$

D'après le théorème de la bijection, on en déduit que $f_2 :]-\pi/2, \pi/2[\to]0, +\infty[$ est bijective. Par conséquent, $f = f_2 \circ f_1 : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est bijective et :

$$f^{-1} = (f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}.$$

On sait que $f_1^{-1} :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ est la restriction de la fonction tan. De plus, on a pour tout $y \in]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f_2(x) = y &\iff \frac{\pi - 2x}{\pi + 2x} = y \\ &\iff \pi - 2x = y(\pi + 2x) \\ &\iff \pi - y\pi = 2xy + 2x \\ &\iff \pi(1 - y) = 2(y + 1)x \\ &\iff x = \frac{\pi(1 - y)}{2(1 + y)}. \end{aligned}$$

On en déduit que la bijection réciproque de f_2 est l'application $f_2^{-1} :]0, +\infty[\to]-\pi/2, \pi/2[, y \mapsto \pi(1 - y)/(2(1 + y))$. Finalement, la bijection réciproque de f est :

$$f^{-1} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, y \mapsto (f_1^{-1} \circ f_2^{-1})(y) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(y)) = \tan\left(\frac{\pi(1 - y)}{2(1 + y)}\right).$$

□

Exercice d'application 25
Montrer que la fonction $f : x \mapsto 2\arccos(x - 1)/(\pi + \arccos(x - 1))$ réalise une bijection sur son ensemble de définition dont on déterminera l'ensemble d'arrivée et sa bijection réciproque.

Exercice d'application 26
Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{e^x - e^{-x}}$ réalise une bijection sur son ensemble de définition dont on déterminera l'ensemble d'arrivée et sa bijection réciproque.