Fiche méthodologique nº 7

Dénombrer

1 Utiliser les modèles combinatoires usuels

Voici quelques modèles combinatoires usuels à connaître par cœur car on les utilise fréquemment. Il faut savoir les repérer très vite dans les calculs de dénombrement. Dans cette section, E désigne un ensemble fini de cardinal $n = \text{card}(E) \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in \mathbb{N}^\star$.

1.1 Listes avec répétition

Une p-liste de E est un p-uplet d'éléments de E, c'est-à-dire $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$.

$$\boxed{\begin{aligned} n^p &= \text{nombre de } p\text{-listes de } E \\ &= \text{nombre de choix successifs avec remise de } p \text{ éléments de } E \\ &= \text{nombre d'applications de } [\![1,p]\!] \text{ dans } E. \end{aligned}}$$

Remarque. La dernière égalité se retrouve avec la bijection de E^p dans $E^{[\![1,p]\!]}$ qui à une une p-liste $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ associe l'application $k \mapsto x_k$.

Exercice d'application 1
On considère une urne contenant $n \in \mathbb{N}^\star$ boules numérotées de 1 à n. On tire successivement et avec remise trois boules. Combien y a-t-il de triplets résultats possibles ?

Exercice d'application 2
Dénombrer les mots de 5 lettres.

1.2 Listes sans répétition

Une p-liste sans répétition de E est un p-uplet d'éléments de E deux à deux distincts, c'est-à-dire $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$ telle que $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$ pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$. En particulier, il existe des p-listes sans répétition de E si et seulement si $p \leqslant n$.

$$\boxed{\begin{aligned} \tfrac{n!}{(n-p)!} &= \text{nombre de } p\text{-listes sans répétition de } E \\ &= \text{nombre de choix successifs sans remise de } p \text{ éléments de } E \\ &= \text{nombre de choix simultanés et ordonnés de } p \text{ éléments de } E \\ &= \text{nombre d'applications injectives de } [\![1,p]\!] \text{ dans } E. \end{aligned}}$$

Remarque. Un choix simultané mais ordonné de p éléments de E revient à un choix successif de p éléments de E.

Exercice d'application 3
On considère une urne contenant $n \in \mathbb{N}^\star$ boules numérotées de 1 à n. On tire successivement et sans remise trois boules. Combien y a-t-il de triplets résultats possibles ?

Exercice d'application 4
Dénombrer les mots de 5 lettres différentes deux à deux.

1.3 Permutations

Une permutation de E est une n-liste sans répétition d'éléments de E, c'est-à-dire $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ telle que $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$$\boxed{\begin{aligned} n! &= \text{nombre de permutations de } E \\ &= \text{nombre de choix successifs sans remise de tous les éléments de } E \\ &= \text{nombre de façons d'ordonner tous les éléments de } E \\ &= \text{nombre d'applications bijectives de } [\![1,n]\!] \text{ dans } E. \end{aligned}}$$

Exercice d'application 5
De combien de façons 10 personnes peuvent-elles s'asseoir autour d'une table ?

Exercice d'application 6
Dénombrer les mots de 5 lettres écrits avec les lettres V, A, C, H et E tels que chaque lettre est utilisée exactement une fois.

1.4 Combinaisons

Une p-combinaison de E est une partie de E à p éléments, c'est-à-dire $\{x_1, x_2, \dots, x_p\} \subset E$ telle que $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$ pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$. En particulier, il existe des p-combinaisons de E si et seulement si $p \leqslant n$.

$$\boxed{\begin{aligned} \tbinom{n}{p} = \tfrac{n!}{p!(n-p)!} &= \text{nombre de } p\text{-combinaisons de } E \\ &= \text{nombre de choix simultanés et non ordonnés de } p \text{ éléments de } E. \end{aligned}}$$

Attention. Contrairement aux listes, les combinaisons ne sont pas ordonnées !
Remarque. Puisqu'il y a $p!$ façons d'ordonner p éléments de E (nombre de permutations), chaque p-combinaison correspond à $p!$ p-listes sans répétition. On retrouve donc le nombre de p-combinaisons en divisant le nombre de p-listes sans répétition par $p!$.

Exercice d'application 7
On considère une urne contenant $n \in \mathbb{N}^\star$ boules numérotées de 1 à n. On tire simultanément trois boules. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

Exercice d'application 8
Combien y a-t-il de mains différentes de 5 cartes tirées dans un jeu de 32 cartes ?

Exercice d'application 9
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En dénombrant l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ de deux manières différentes, démontrer que $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

2 Utiliser une bijection

Pour dénombrer un ensemble fini E, il suffit de trouver une bijection $f : E \to F$ où F est un ensemble fini qu'on sait dénombrer. Alors $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F)$.

Exemple 1
Soit $(p, n) \in (\mathbb{N}^\star)^2$ tel que $p \leqslant n$. Dénombrer les p-listes strictement croissantes de $[\![1, n]\!]$.

Solution. Soit E l'ensemble des p-listes strictement croissantes de $[\![1, n]\!]$. On pose f l'application qui à tout $X = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in E$ associe l'ensemble $f(X) = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$. Puisque X est strictement croissante, ses composantes sont deux à deux distinctes et donc $\mathrm{card}(f(X)) = p$. Ainsi $f : E \to F$ où F est l'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$ à p éléments. De plus f est bijective car pour toute partie $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\} \in F$ il n'y a qu'une seule façon d'ordonner les éléments de Y par ordre strictement croissant. Finalement $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F) = \binom{n}{p}$. $\square$

Exercice d'application 10
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Retrouver la formule du cardinal de l'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$ à l'aide d'une bijection de $\mathcal{P}([\![1, n]\!])$ dans un ensemble de n-listes à déterminer.

3 Passer au complémentaire

Soit A une partie d'un ensemble fini E. On a :

$$\mathrm{card}\left(\overline{A}\right) = \mathrm{card}(E \setminus A) = \mathrm{card}(E) - \mathrm{card}(A).$$

Conseil. En pratique, on utilise souvent $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(E) - \mathrm{card}(\overline{A})$ lorsque le dénombrement du complémentaire $\overline{A}$ est plus facile que celui de la partie A.

Exercice d'application 11
Dénombrer les mots de 7 lettres ayant au moins deux lettres identiques.

Exercice d'application 12
Combien y a-t-il de mains différentes de 5 cartes contenant au moins un as tirées dans un jeu de 32 cartes ?

4 Dénombrer une union

Soient A et B deux parties d'un ensemble fini. On a (formule de Poincaré) :

$$\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B).$$

Remarque. On retrouve facilement ce résultat à l'aide d'un dessin.

Exemple 2
Dénombrer les mots de 10 lettres écrits avec les lettres «R», «A» ou «T» et tels que chaque lettre est utilisée au moins une fois.

Solution. On note :
- E l'ensemble des mots de 10 lettres écrits avec les lettres «R», «A» ou «T»,
- A_1 ceux écrits seulement avec les lettres «R» ou «A»,
- A_2 ceux écrits seulement avec les lettres «R» ou «T»,
- A_3 ceux écrits seulement avec les lettres «A» ou «T».

Alors, le nombre cherché vaut :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{card}\left(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}\right) = \mathrm{card}(E) - \mathrm{card}\Big(A_1 \cup (A_2 \cup A_3)\Big) \\
=&3^{10} - \Big(\mathrm{card}(A_1) + \mathrm{card}(A_2 \cup A_3) - \mathrm{card}\Big(A_1 \cap (A_2 \cup A_3)\Big)\Big) \\
=&3^{10} - 2^{10} - \Big(\mathrm{card}(A_2) + \mathrm{card}(A_3) - \mathrm{card}(A_2 \cap A_3)\Big) + \mathrm{card}\Big((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)\Big) \\
=&3^{10} - 3 \times 2^{10} + 1 + \mathrm{card}(A_1 \cap A_2) + \mathrm{card}(A_1 \cap 1_3) - \mathrm{card}\Big((A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_3)\Big) \\
=&3^{10} - 3 \times 2^{10} + 3 - \mathrm{card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 3^{10} - 3 \times 2^{10} + 3.
\end{aligned}$$

$\square$

Exercice d'application 13
Dénombrer les mots de 10 lettres écrits avec les lettres C, H, A ou T et tels qu'au moins une lettre n'est pas utilisée.

Exercice d'application 14
Combien y a-t-il de mains différentes de 5 cartes contenant au moins un roi et une dame dans un jeu de 32 cartes ?

5 Partitionner

Soit E un ensemble fini qu'on partitionne en $n \in \mathbb{N}^\star$ parties $A_1, A_2, \dots, A_n$, c'est-à-dire $E = \bigcup_{k=1}^n A_k$ et $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. On a :

$$\mathrm{card}(E) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{card}(A_k).$$

Autrement dit, si un ensemble fini peut être partitionné en plusieurs cas deux à deux disjoints alors son dénombrement est la somme des nombres de choix de chaque cas.

Exercice d'application 15
Combien y a-t-il de mains de 5 cartes contenant exactement un valet et un pique tirées dans un jeu de 32 cartes ?

Exercice d'application 16
Soient A et B deux ensembles disjoints de cardinaux $m = \text{card}(A)$ et $n = \text{card}(B)$. Soit $k \in [\![0, m+n]\!]$. En dénombrant l'ensemble des parties à k éléments de $A \cup B$ de deux manières différentes, démontrer que $\binom{m+n}{k} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{m}{\ell}\binom{n}{k-\ell}$ (identité de Vandermonde).

6 Dénombrer un produit cartésien

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ ensembles finis notés $E_1, E_2, \ldots, E_n$. On a :

$$\text{card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) = \prod_{k=1}^{n} \text{card}(E_k).$$

Autrement dit, si un ensemble fini peut se décomposer en plusieurs composantes alors son dénombrement est le produit des nombres de choix de chaque composante.

Exemple 3
Un anagramme d'un mot est un mot écrit avec les mêmes lettres dans un ordre différent. Soit un mot de $n \in \mathbb{N}^\star$ lettres avec $p \in \mathbb{N}^\star$ lettres différentes notées $L_1, L_2, \ldots, L_p$ tel que chaque lettre L_k est répétée exactement $n_k \in \mathbb{N}^\star$ fois (donc $n = \sum_{k=1}^{p} n_k$). Dénombrer les anagrammes de ce mot.

Solution. Il y a $\binom{n}{n_1}$ choix de placer les n_1 lettres L_1. Puis, il reste $\binom{n-n_1}{n_2}$ choix de placer les n_2 lettres L_2. Puis, il reste $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ choix de placer les n_3 lettres L_3, etc. Le nombre d'anagrammes est donc :

$$\boxed{\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{p-1}}{n_p}}$$
$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \times \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \times \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \times \cdots \times \frac{n_p!}{n_p!0!}$$
$$= \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_p!}.$$

On retrouve également ce résultat en divisant le nombre $n!$ de façons de placer toutes les lettres par le nombre $n_1!$ de façons d'ordonner les lettres L_1 fois le nombre $n_2!$ de façons d'ordonner les lettres L_2 fois etc. □

Exercice d'application 17
Combien y a-t-il d'anagrammes du mot «ABRACADABRA» ? Combien d'entre eux présentent les deux lettres «B» côte à côte ?

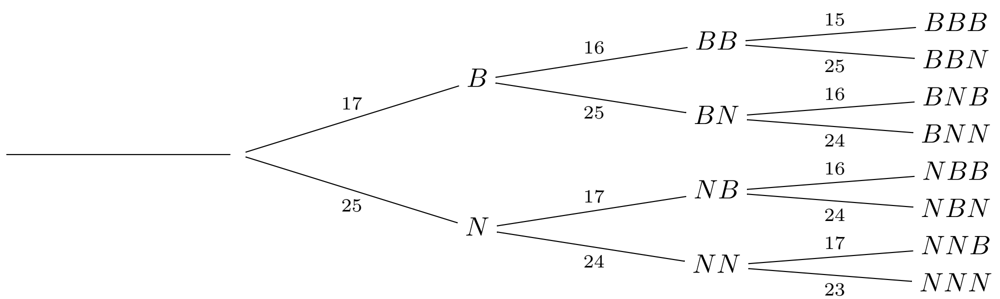
Exercice d'application 18
Un nombre palindrome est un nombre symétrique dont l'ordre des chiffres est identique quel que soit le sens de lecture. Dénombrer les nombres palindromes à $n \in \mathbb{N}^\star$ chiffres.

7 Utiliser un arbre de dénombrement

Parfois, l'ensemble fini à dénombrer est une partie A d'un plus grand ensemble E dont les éléments sont construits en plusieurs étapes successives. On peut alors utiliser un arbre pour dénombrer tous les éléments possibles : chaque nœud représente une étape de la construction où le nombre de branches filles issues de ce nœud correspond au nombre de cas possibles de cette étape. Sur chacune des branches filles issues d'un nœud, on note le nombre de choix qui aboutissent au cas correspondant à cette branche. Ainsi, pour dénombrer les éléments construits pour un certain cas, il suffit de prendre le produit de tous les nombres notés sur les branches aboutissant à ce cas. Finalement, on obtient le cardinal de A en sommant les différents cas qui correspondent aux éléments de A.

Exemple 4
On considère une urne contenant 17 boules blanches numérotées de 1 à 17 et 25 boules noires numérotées de 1 à 25. On tire successivement et sans remise trois boules. Combien y a-t-il de triplets résultats donnant plus de boules blanches que de boules noires ?

Solution. Il y a $17 + 25 = 42$ boules au total et donc $42 \times 41 \times 40 = 68880$ triplets résultats possibles. On utilise un arbre pour dénombrer tous les tirages possibles en notant B le tirage d'une boule blanche et N celui d'une boule noire.



Ainsi, il y a par exemple $17 \times 25 \times (17-1) = 6800$ triplets résultats possible en tirant dans l'ordre une boule blanche puis une boule noire puis une boule blanche. Le nombre de triplets résultats donnant plus de boules blanches que de boules noires est donc égal à :

$$17 \times 16 \times 15 + 17 \times 16 \times 25 + 17 \times 25 \times 16 + 25 \times 17 \times 16 = 24480.$$

□

Exercice d'application 19
On considère une urne contenant 5 boules jaunes numérotées de 1 à 5, 6 boules rouges numérotées de 1 à 6 et 7 boules vertes numérotées de 1 à 7. On tire successivement et sans remise trois boules avec la règle suivante : si on tire une boule jaune on enlève de l'urne toutes les autres boules jaunes, si on tire une boule rouge on enlève de l'urne la boule verte de plus petit numéro et si on tire une boule verte on enlève de l'urne la boule verte de plus grand numéro. Combien y a-t-il de triplets résultats donnant au moins une boule de chaque couleur ?