Fiche méthodologique nº 9

Résoudre des systèmes linéaires

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour résoudre un système linéaire (S) de $\mathbb{K}$, on commence toujours par l'écrire sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{lr} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \dots & \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + a_{n,3}x_3 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n & (L_n) \end{array}\right. \qquad (S)$$

où :

- $p \in \mathbb{N}^\star$ est le nombre d'inconnues et $n \in \mathbb{N}^\star$ est le nombre d'équations ;
- $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ est le vecteur des inconnues ;
- $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice des coefficients ;
- $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ est le vecteur des seconds membres.

Pour simplifier l'écriture des opérations utilisées, on désigne par $(L_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ les lignes du système linéaire (S). Les opérations élémentaires suivantes permettent de transformer le système linéaire (S) en un système équivalent :

- permutation de deux lignes :
$$L_i \leftrightarrow L_j \quad \text{où } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\,;$$
- transformation d'une ligne à l'aide d'une autre :
$$L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j \quad \text{où } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ avec } i \neq j \text{ et } (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^\star \times \mathbb{K}.$$

Attention. Pour cette opération, le coefficient λ est non nul !

1 Échelonner un système linéaire

Un système linéaire est dit échelonné lorsque le nombre de coefficients nuls consécutifs au début de chaque ligne croît strictement ligne après ligne (ou reste constant égal à p, c'est-à-dire égal au nombre maximal de coefficients nuls possible). La méthode du pivot de Gauss est un procédé algorithmique permettant d'échelonner n'importe quel système linéaire à l'aide d'une succession d'opérations élémentaires sur les lignes.

```
initialiser r à 0 (c'est l'indice de la ligne comportant le dernier pivot choisi)
pour j allant de 1 à p (c'est l'indice de la colonne dans laquelle on cherche un pivot)
   s'il existe au moins un k ∈ ⟦r+1,n⟧ tel que a_{k,j} ≠ 0
      choisir un k ∈ ⟦r+1,n⟧ tel que a_{k,j} ≠ 0 (a_{k,j} est le pivot de la j-ième colonne)
      ajouter 1 à r et permuter L_r ↔ L_k (le pivot se déplace à la position a_{r,j})
      pour i allant de r+1 à n (ce sont les indices des lignes sous le pivot)
         transformer L_i ← a_{r,j}L_i − a_{i,j}L_r (chaque coefficient sous le pivot devient nul)
```

Conseil. Pour ne pas s'égarer dans les calculs ou pour corriger rapidement une erreur, il est fortement conseillé d'entourer le pivot choisi à chaque étape et d'indiquer l'opération élémentaire utilisée à droite de chaque ligne modifiée.

À la fin de l'algorithme, on obtient un système linéaire équivalent au système linéaire de départ, dans lequel chaque ligne et chaque colonne contienne au plus un pivot non nul. De plus, tous les coefficients à gauche d'un pivot sur la même ligne sont nuls et tous les coefficients sous un pivot sur la même colonne (associés à la même inconnue) sont nuls. Le système linéaire équivalent obtenu est donc échelonné.

Conseil. Afin d'éviter les calculs trop compliqués lors des transformations des lignes sous le pivot pour faire apparaître des zéros, il est préférable de choisir pour chaque pivot (le coefficient $a_{r,j}$ dans les transformations de lignes) un coefficient égal à 1 ou -1, et donc de choisir pour chaque indice $j \in [\![1,p]\!]$ un $k \in [\![r+1,n]\!]$ tel que $|a_{k,j}| = 1$.

Conseil. S'il n'est pas possible de choisir un pivot égal à 1 ou -1, on peut utiliser des opérations intermédiaires sur les lignes (sans modifier les lignes comportant les pivots précédents) pour essayer de faire apparaître des coefficients égaux à 1 ou -1 avant de reprendre l'algorithme de la méthode du pivot de Gauss.

Exercice d'application 1

Échelonner les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x + t + 2y = z + 2 \\ y + t + 3z = 1 + x \\ x + z + 3t + 5y = 5 \\ t + 4y + 5x = 2 + 9z \end{cases} \qquad (S1)$$

$$\begin{cases} x + z = y + t + 3 \\ y + t + 2z + 8 = 3x \\ x + 2t + 3y = z + 5 \\ z + 2x = 3(1 + y + t) \end{cases} \qquad (S2)$$

$$\begin{cases} 2(1 + y - x) = t + 3z \\ x + 3t = y + 8 \\ x + z = y + 3 \\ x + t + 2z = y - 1 \end{cases} \qquad (S3)$$

2 Déterminer l'ensemble des solutions

Après avoir utilisé la méthode du pivot de Gauss, on définit pour le système linéaire équivalent échelonné obtenu :

- le rang : le nombre de pivots non nuls ;
- les équations principales : les lignes contenant les pivots non nuls ;
- les équations auxiliaires : les lignes qui ne sont pas des équations principales ;
- les inconnues principales : les inconnues associées aux pivots non nuls ;
- les inconnues auxiliaires : les inconnues qui ne sont pas des inconnues principales.

Remarque. Puisque la variable r dans l'algorithme de la méthode du pivot de Gauss compte le nombre de pivots choisis, le rang est égal à la valeur finale de r lorsque l'algorithme se termine.
Remarque. En fonction des choix effectués dans la méthode du pivot de Gauss, on peut obtenir des pivots différents et donc des équations (ou des inconnues) principales (ou auxiliaires) différentes ; seul le rang du système linéaire (donc les nombres d'équations et d'inconnues principales ou auxiliaires) reste le même quels que soient les choix faits.

On a ensuite trois cas possibles pour l'ensemble des solutions du système linéaire.

1. S'il existe au moins une équation auxiliaire non compatible alors le système linéaire n'a pas de solutions.
2. Si toutes les équations auxiliaires sont compatibles et si toutes les inconnues sont principales alors le système linéaire admet une unique solution. Pour déterminer cette solution, il suffit de «remonter» le système linéaire, c'est-à-dire de déterminer chaque inconnue à l'aide de chaque équation principale en partant de la dernière et en procédant par substitution.
3. Si toutes les équations auxiliaires sont compatibles et s'il existe au moins une inconnue auxiliaire alors le système linéaire admet une infinité de solutions. Pour déterminer cette infinité de solutions, il suffit de considérer chaque inconnue auxiliaire comme un paramètre, de passer ces paramètres dans les seconds membres, puis de «remonter» le système linéaire, c'est-à-dire de déterminer chaque inconnue principale en fonction des paramètres à l'aide de chaque équation principale en partant de la dernière et en procédant par substitution.

Remarque. Dans le cas particulier où il y a égalité entre le nombre d'équations, le nombre d'inconnues et le rang, alors le système linéaire est dit «carré de rang maximal» et il admet une unique solution (puisqu'il n'existe pas d'équations ou d'inconnues auxiliaires).

Exercice d'application 2
Résoudre les systèmes linéaires (S1), (S2) et (S3).

Exercice d'application 3
Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} z+2x=t+3+4y \\ x=1+t+2y+3z \\ 3x=2(z+t+2+3y) \end{cases} \tag{S4}$$

$$\begin{cases} y+z+2x=0 \\ z=2+x \\ 3x=1+y \\ y=z+2x \end{cases} \tag{S5}$$

$$\begin{cases} x+z+4=t+2y \\ z+t+2x=9 \\ y+3x=5 \\ z+2x=y+3 \\ y+z+2x=t+3 \end{cases} \tag{S6}$$

3 Résoudre un système linéaire avec paramètres

Si les coefficients du système linéaire dépendent d'un ou plusieurs paramètres, la méthode du pivot de Gauss s'applique toujours mais il est nécessaire de vérifier que chaque pivot choisi soit bien non nul !

Par conséquent, il est préférable de choisir pour chaque pivot un coefficient qui ne dépende pas des paramètres (donc constant et non nul). Si ce n'est pas possible, alors il est nécessaire de raisonner par disjonction pour traiter séparément le cas où le pivot choisi est non nul (la méthode du pivot de Gauss peut poursuivre normalement) du cas où le pivot choisi est nul (on doit alors changer de choix de pivot).
Conseil. S'il n'est pas possible de choisir un pivot qui ne dépend pas des paramètres, on peut utiliser des opérations intermédiaires sur les lignes (sans modifier les lignes comportant les pivots précédents) pour essayer de faire apparaître des coefficients constants avant de reprendre l'algorithme de la méthode du pivot de Gauss.

De plus, après avoir utilisé la méthode du pivot de Gauss, si les seconds membres des équations auxiliaires du système linéaire équivalent échelonné obtenu dépendent aussi d'un ou plusieurs paramètres, il est nécessaire de raisonner par disjonction de cas pour traiter séparément le cas où toutes les équations auxiliaires sont compatibles des cas où au moins l'une d'entre elles ne l'est pas.

Exercice d'application 4
Résoudre le système linéaire suivant en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} m(x-1)+y=2(z-1) \\ x+y+1=-m(z-1) \\ mx+y-2=m(z-1) \end{cases} \tag{S7}$$

Exercice d'application 5
Résoudre le système linéaire suivant en fonction des paramètres $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} ax\ +\ by\ =0 \\ bx\ +\ ay\ =1 \end{cases} \tag{S8}$$

Exercice d'application 6
Résoudre le système linéaire suivant en fonction des paramètres $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} ax+y+z=0 \\ bx+y+z=0 \\ x+y+1=c(1-z) \end{cases} \tag{S9}$$