

# Les mathématiques en BCPST

## 1 Que sont les mathématiques ?

Les mathématiques sont un ensemble de connaissances issues de raisonnements déductifs appliqués à des objets abstraits comme les formes, les nombres, les structures ou les transformations.

Le raisonnement mathématique est abstrait, rigoureux, précis et concis. Il a pour objectif de démontrer de manière certaine de nouvelles vérités à partir d'affirmations vraies.

Les mathématiques sont à la fois :

- une science : un ensemble de connaissances et de techniques,
- une méthode de recherche de nouveaux savoirs ;

et un langage : un lexique propre et des règles syntaxiques, un moyen d'expression et de communication.

Différentes branches des mathématiques étudiées en BCPST :

- Logique : science du raisonnement mathématique
- Algèbre : science du calcul littéral et des équations
  - Algèbre générale : science des structures algébriques
  - Algèbre linéaire : science du calcul vectoriel et matriciel
- Géométrie : science des figures et de leurs mesures
  - Géométrie analytique : science des représentations par des coordonnées
- Analyse : science des limites et du calcul infinitésimal
  - Analyse réelle : science des fonctions réelles d'une variable
  - Analyse vectorielle : science des fonctions réelles de plusieurs variables
  - Analyse numérique : science des algorithmes de résolution numérique
- Systèmes dynamiques : science des évolutions et des interactions
- Combinatoire : science des configurations d'ensembles finis
- Probabilités : science du hasard et de l'incertitude
- Statistiques : science des données et des grands nombres

D'autres branches des mathématiques :

- Arithmétique : science des opérations sur les nombres entiers
- Théorie des nombres : science des propriétés des nombres entiers
- Analyse complexe : science des fonctions à variables complexes
- Analyse fonctionnelle : science des ensembles de fonctions
- Topologie : science des déformations continues
- Géométrie différentielle : science des surfaces régulières
- Théorie des graphes : science des graphes et des réseaux
- mais aussi : théorie des groupes, algèbre non-commutative, topologie algébrique, géométrie algébrique, géométrie non-euclidienne, théorie des opérateurs, analyse harmonique, théorie de la mesure, calcul stochastique, théorie des jeux, etc.

## 2 Comment est organisé un cours de maths ?

### • Définitions

Les définitions constituent le vocabulaire du mathématicien. Chaque définition introduit un nouvel «objet» mathématique en énonçant ses attributs qui le caractérisent. Le but de chaque chapitre du cours et de chaque paragraphe d'un chapitre est le plus souvent d'étudier le ou les objets définis en son début.

Les définitions sont à apprendre par cœur pour savoir précisément de quoi on parle.

### • Propriétés

Les propriétés sont des affirmations vraies. Chaque propriété est une particularité d'un objet mathématique qui permet de mieux le comprendre.

Les propriétés sont à apprendre et à comprendre pour savoir les utiliser en pratique.

### • Théorèmes

Les théorèmes sont des résultats importants prouvés par une démonstration rigoureuse. Chaque théorème est écrit sous la forme d'une ou plusieurs hypothèses impliquant une conclusion.

Les théorèmes sont à apprendre par cœur pour être cités précisément (nom du théorème, liste des hypothèses à vérifier, conclusion). Comme les propriétés, ils sont à comprendre pour savoir les appliquer en pratique. Enfin, il peut être utile de connaître leurs démonstrations pour s'en inspirer.

On parle également de :

- lemme : résultat préliminaire à la démonstration d'un théorème,
- corollaire : autre résultat important déduit directement d'un théorème.

### • Exemples

Les exemples permettent d'illustrer les définitions ou la mise en application des propriétés et des théorèmes. Ils peuvent également justifier qu'une affirmation est fautive, on parle alors de contre-exemples.

Les exemples sont à comprendre. Il peut être utile de connaître quelques exemples qu'on rencontre souvent pour aller plus vite dans ses raisonnements.

## 3 Pourquoi étudier les mathématiques en BCPST ?

(extrait du programme officiel du minist. de l'ens. sup. et de la rech.)

L'objectif de l'enseignement des mathématiques en BCPST est double.

D'une part il contribue à l'approfondissement de la culture scientifique générale en donnant aux étudiants un accès à quelques domaines fondamentaux (algèbre linéaire, analyse, probabilités). La pratique du raisonnement mathématique concourt ici comme ailleurs à la formation de l'esprit d'un futur scientifique ; la rigueur du raisonnement, l'esprit critique, le contrôle et l'analyse des hypothèses, le sens de l'observation et celui de la déduction trouvent en mathématiques un champ d'action où ils seront cultivés de manière spécifique.

D'autre part, il contribue à fournir des représentations et un langage dont les autres disciplines scientifiques étudiées dans ces classes et au-delà sont demandeuses ou utilisatrices. De là l'importance d'une cohérence et d'une coordination aussi bonnes que

possible entre les diverses disciplines : il importe d'éviter les redondances tout en soulignant les points communs, de limiter les divergences ou ambiguïtés dues à la diversité des points de vue possibles sur un même objet tout en enrichissant l'enseignement par cette même diversité.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques dans diverses situations, et éventuellement capables de dialoguer avec des mathématiciens dans le cadre de leur futur métier.

L'enseignement des mathématiques en filière BCPST vise le développement de compétences utiles aux scientifiques, qu'ils soient ingénieurs, chercheurs ou enseignants, pour identifier les situations auxquelles ils sont confrontés, dégager les meilleures stratégies pour les résoudre, prendre avec un recul suffisant des décisions dans un contexte souvent complexe.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants leur permet de gérer leurs apprentissages de manière responsable en repérant points forts et points faibles. Ces compétences prennent tout leur sens dans le cadre de la résolution de problèmes, de la modélisation ou formalisation jusqu'à la présentation des résultats en passant par la démarche de résolution proprement dite.

De manière spécifique, on peut distinguer les compétences suivantes :

S'engager dans une recherche et mettre en œuvre des stratégies	Il s'agit d'analyser un problème, de se poser des questions, d'expérimenter sur des exemples, de formuler des conjectures.
Modéliser	C'est traduire un phénomène en langage mathématique, élaborer des concepts et des outils lors d'une phase d'abstraction ou de conceptualisation.
Représenter	Il s'agit de choisir le registre (numérique, algébrique, géométrique) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, d'être capable de passer d'un registre à un autre, d'un mode de représentation (souvent visuelle : courbes, graphes, arborescences, tableaux) à un autre.
Raisonner et argumenter	Cela consiste à effectuer des inférences (inductives et déductives), à conduire une démonstration, à confirmer ou infirmer une conjecture, et enfin à évaluer la pertinence d'un concept au regard du problème posé.
Calculer, manipuler des symboles et maîtriser le formalisme mathématique	C'est effectuer un calcul à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel), organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, choisir les transformations et effectuer des simplifications, contrôler les résultats, mettre en œuvre des algorithmes, manipuler et exploiter des expressions symboliques, comprendre et utiliser le langage mathématique.
Communiquer à l'écrit et à l'oral	Il s'agit de comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, d'opérer la conversion entre le langage naturel et le langage symbolique formel, de rédiger une solution rigoureuse, de présenter et de défendre une production mathématique pour convaincre un interlocuteur ou un auditoire.

## 4 Comment progresser en mathématiques ?

- Approfondir la maîtrise du cours :
  - Apprendre le cours
  - Faire des fiches de résumé du cours
  - Utiliser des schémas ou des dessins pour faciliter l'apprentissage
  - Comprendre les raisonnements et les démonstrations
  - Relire régulièrement le cours
  - Remettre en cause ses connaissances et ses acquis à l'aide du cours
  - Mettre le cours en doute à l'aide de questions et tenter d'y répondre
  - Ne jamais croire que le cours est totalement assimilé
- S'exercer régulièrement et efficacement :
  - Apprendre et maîtriser les méthodes
  - Faire des petits exercices pour assimiler les nouvelles notions et méthodes
  - Passer aux problèmes plus conséquents dès que les méthodes sont maîtrisées
  - S'entraîner en temps limité
  - Toujours être méthodique et synthétique dans son travail
  - Diversifier ses sources d'exercices et de sujets d'entraînement
  - Travailler seul avec sérieux et concentration
  - Travailler en groupe avec dynamisme et curiosité
- Améliorer sa rédaction et son expression :
  - Écrire lisiblement (même dans la prise de notes et au brouillon)
  - Utiliser un français correct (orthographe, grammaire, syntaxe)
  - Réfléchir au sens de chaque mot employé
  - S'exprimer précisément pour poser des questions
  - Expliquer clairement ce qu'on a compris à d'autres
  - Comprendre et répondre aux questions lors du travail en groupe
  - S'entraîner sans cesse à rédiger ses réponses (même au brouillon)
  - Relire ses copies corrigées pour comprendre ses erreurs et ne pas les refaire
  - Comparer sa rédaction avec celle des corrigés
  - Toujours chercher la précision et la concision dans sa rédaction
- Ne pas se décourager :
  - Ne pas croire en la «bosse des maths»
  - Poser des questions (il n'y a pas de questions stupides!!)
  - Ne jamais laisser une question incomprise
  - Ne jamais rester les bras croisés en attendant de trouver une réponse
  - Écrire tout ce qui passe par la tête quand on ne sait pas quoi faire
  - Ne jamais effacer ses erreurs ou jeter ses brouillons
  - Apprendre de chacune de ses erreurs
  - Toujours s'obstiner sans perdre de temps
  - Savoir passer à autre chose pour revenir avec plus d'efficacité
  - Écouter et suivre les conseils