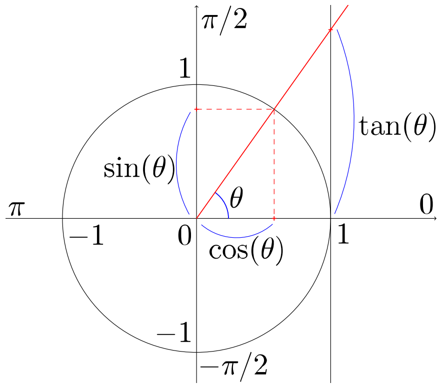
Formulaire de trigonométrie

1 Cercle trigonométrique

— Ensemble de définition de la fonction tangente :

$$\boxed{\begin{aligned}\mathscr{D}_{\tan} &= \mathbb{R}\setminus\left\{\tfrac{\pi}{2}+k\pi \,|\, k\in\mathbb{Z}\right\}\\ &= \textstyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\tfrac{\pi}{2}+k\pi, \tfrac{\pi}{2}+k\pi\right[\end{aligned}}$$



— Théorème de Thalès :

$$\forall\theta\in\mathscr{D}_{\tan},\quad \boxed{\tan(\theta)=\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}$$

— Théorème de Pythagore :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \boxed{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1}$$

— Corollaire de Thalès-Pythagore : $\forall\theta\in\mathscr{D}_{\tan},\ 1+\tan^2(\theta)=\dfrac{1}{\cos^2(\theta)}$

— Parités et symétries :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \left\{\begin{aligned} &\boxed{\cos(-\theta)=\cos(\theta)}\\ \cos(\tfrac{\pi}{2}-\theta)&=\sin(\theta)\\ \cos(\pi-\theta)&=-\cos(\theta)\end{aligned}\right. \quad\text{et}\quad \left\{\begin{aligned} &\boxed{\sin(-\theta)=-\sin(\theta)}\\ \sin(\tfrac{\pi}{2}-\theta)&=\cos(\theta)\\ \sin(\pi-\theta)&=\sin(\theta)\end{aligned}\right.$$

$$\text{et}\quad\left\{\begin{aligned} \forall\theta\in\mathscr{D}_{\tan},&\quad \boxed{\tan(-\theta)=-\tan(\theta)}\\ \forall\theta\in\mathbb{R}\setminus\{k\tfrac{\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\},&\quad \tan(\tfrac{\pi}{2}-\theta)=1/\tan(\theta)\\ \forall\theta\in\mathscr{D}_{\tan},&\quad \tan(\pi-\theta)=-\tan(\theta)\end{aligned}\right.$$

— Décalages et périodicités :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \left\{\begin{aligned} \cos(\theta+\tfrac{\pi}{2})&=-\sin(\theta)\\ \cos(\theta+\pi)&=-\cos(\theta)\\ &\boxed{\cos(\theta+2\pi)=\cos(\theta)}\end{aligned}\right. \quad\text{et}\quad \left\{\begin{aligned} \sin(\theta+\tfrac{\pi}{2})&=\cos(\theta)\\ \sin(\theta+\pi)&=-\sin(\theta)\\ &\boxed{\sin(\theta+2\pi)=\sin(\theta)}\end{aligned}\right.$$

$$\text{et}\quad\left\{\begin{aligned} \forall\theta\in\mathbb{R}\setminus\{k\tfrac{\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\},&\quad \tan(\theta+\tfrac{\pi}{2})=-1/\tan(\theta)\\ \forall\theta\in\mathscr{D}_{\tan},&\quad \boxed{\tan(\theta+\pi)=\tan(\theta)}\end{aligned}\right.$$

2 Valeurs remarquables

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
cos	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{0}/2$
sin	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{4}/2$
tan	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	

3 Liens avec les nombres complexes

— Définition des fonctions cosinus et sinus :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \boxed{\cos(\theta)=\mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\right)}\quad\text{et}\quad\boxed{\sin(\theta)=\mathrm{Im}\left(e^{i\theta}\right)}$$

— Formules d'Euler :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \boxed{\cos(\theta)=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}}\quad\text{et}\quad\boxed{\sin(\theta)=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$$

— Formule de Moivre :

$$\forall(n,\theta)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R},\quad \boxed{\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)=\big(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\big)^n}$$

— Factorisation par l'angle moitié :

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\quad \boxed{e^{i\alpha}+e^{i\beta}=2\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i(\alpha+\beta)/2}}\quad\text{et}\quad\boxed{e^{i\alpha}-e^{i\beta}=2i\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i(\alpha+\beta)/2}}$$

4 Relations algébriques

— Formules d'addition :

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\quad \boxed{\left\{\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)\\ \sin(\alpha+\beta)&=\cos(\alpha)\sin(\beta)+\sin(\alpha)\cos(\beta)\end{aligned}\right.}$$

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathscr{D}_{\tan}^2,\ \alpha+\beta\in\mathscr{D}_{\tan}\implies\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}}$$

— Formules de duplication :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad\left\{\begin{aligned}&\boxed{\cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)=2\cos^2(\theta)-1=1-2\sin^2(\theta)}\\ &\boxed{\sin(2\theta)=2\cos(\theta)\sin(\theta)}\end{aligned}\right.$$

$$\forall\theta\in\mathscr{D}_{\tan},\ 2\theta\in\mathscr{D}_{\tan}\implies\boxed{\tan(2\theta)=\frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}}$$

— Formules de bissection :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}} \quad \text{et} \quad \left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}}$$

$$\forall \theta \in \mathscr{D}_{\tan},\ \frac{\theta}{2} \in \mathscr{D}_{\tan} \implies \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)} = \frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

— Transformation de produits en sommes (formules d'Euler) :

$$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) \\ \cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta) \end{cases}$$

— Transformation de sommes en produits (factorisation par l'angle moitié) :

$$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \\ \sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \\ \cos(\alpha)+\sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

5 Changement de variable de l'arc moitié

— Expressions en fonction de $\boxed{t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ (formules de duplication) :

$$\forall \theta \in]-\pi,\pi[, \quad \cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan(\theta) = \frac{2t}{1-t^2}$$

6 Inégalités de comparaison

$$\boxed{\forall \theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[, \quad \sin(\theta) \leqslant \theta \leqslant \tan(\theta)}$$

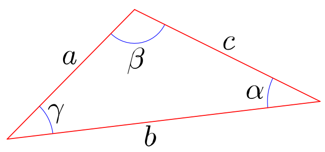
7 Géométrie du triangle

Soit un triangle d'angles α,β,γ et de côtés opposés a,b,c respectivement.

— Loi des cosinus (théorème d'Al-Kashi) :
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

— Loi des sinus :
$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

— Somme des angles (5^e postulat d'Euclide) :
$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$



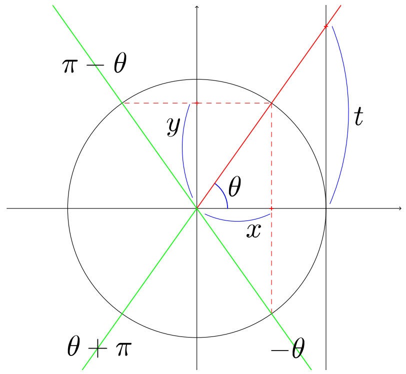
8 Fonctions trigonométriques réciproques

— Définition des fonctions trigonométriques réciproques :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \arccos : [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ x & \mapsto & \text{l'unique } \theta \in [0,\pi] \\ & & \text{tel que } \cos(\theta) = x \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \arcsin : [-1,1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ y & \mapsto & \text{l'unique } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ & & \text{tel que } \sin(\theta) = y \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \arctan : \mathbb{R} & \to & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ t & \mapsto & \text{l'unique } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ & & \text{tel que } \tan(\theta) = t \end{array}}$$



— Réciprocités :

$$\begin{cases} \forall x \in [-1,1], & \cos(\arccos(x)) = x \\ \forall y \in [-1,1], & \sin(\arcsin(y)) = y \\ \forall t \in \mathbb{R}, & \tan(\arctan(t)) = t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall \theta \in [0,\pi], & \arccos(\cos(\theta)) = \theta \\ \forall \theta \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], & \arcsin(\sin(\theta)) = \theta \\ \forall \theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[, & \arctan(\tan(\theta)) = \theta \end{cases}$$

— Résolution d'équations trigonométriques d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in [-1,1], \quad \boxed{\cos(\theta) = x \iff \big(\theta \equiv \arccos(x)\ [2\pi] \text{ ou } \theta \equiv -\arccos(x)\ [2\pi]\big)}$$

$$\forall y \in [-1,1], \quad \boxed{\sin(\theta) = y \iff \big(\theta \equiv \arcsin(y)\ [2\pi] \text{ ou } \theta \equiv \pi - \arcsin(y)\ [2\pi]\big)}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\begin{array}{l} \tan(\theta) = t \iff \big(\theta \equiv \arctan(t)\ [2\pi] \text{ ou } \theta \equiv \arctan(t) + \pi\ [2\pi]\big) \\ \qquad\qquad\ \iff \theta \equiv \arctan(t)\ [\pi] \end{array}}$$

— Quelques relations :

$$\begin{cases} \forall x \in [-1,1], & \arccos(-x) = \pi - \arccos(x) \\ \forall y \in [-1,1], & \arcsin(-y) = -\arcsin(y) \\ \forall t \in \mathbb{R}, & \arctan(-t) = -\arctan(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall x \in [-1,1], & \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} \\ \forall y \in [-1,1], & \cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1-y^2} \end{cases}$$

$$\forall a \in [-1,1],\ \arccos(a) + \arcsin(a) = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}^\star,\ \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } t > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$