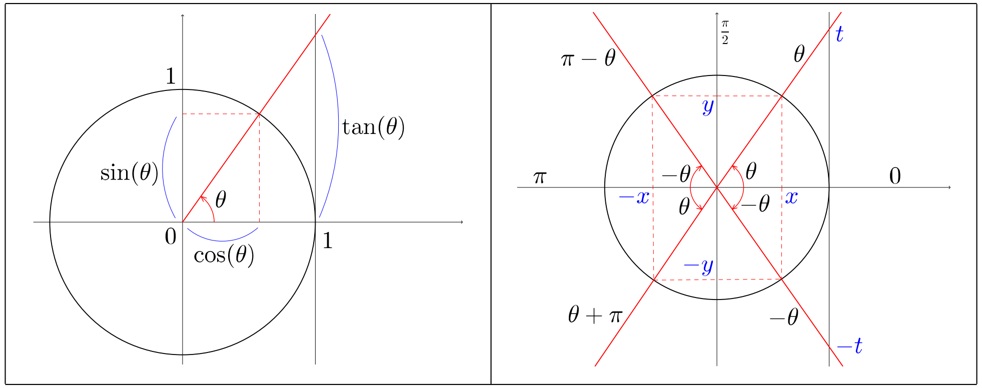
Formulaire de trigonométrie

1 Le cercle trigonométrique



— Ensemble de définition de la fonction tangente :

$$\boxed{\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$$

— Théorèmes de Pythagore et de Thalès :

$$\boxed{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}$$

par conséquent :

$$1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$$

— Périodicités :

$$\boxed{\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)}, \quad \boxed{\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)} \quad \text{et} \quad \boxed{\tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)}$$

— Décalages :

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$$

— Parités :

$$\boxed{\cos(-\theta) = \cos(\theta)}, \quad \boxed{\sin(-\theta) = -\sin(\theta)} \quad \text{et} \quad \boxed{\tan(-\theta) = -\tan(\theta)}$$

— Symétries :

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta), \quad \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta) \quad \text{et} \quad \tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta)$$

2 Valeurs remarquables

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$
$\sin(\theta)$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
$\tan(\theta)$	$\frac{0}{1} = 0$	$\frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$	

3 Formules d'addition et de duplication

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta) \end{aligned}}$$

par conséquent :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(2\theta) &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta) \\ \sin(2\theta) &= 2\cos(\theta)\sin(\theta) \end{aligned}}$$

et :

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)} \quad \text{donc} \quad \tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}$$

4 Fonctions trigonométriques réciproques

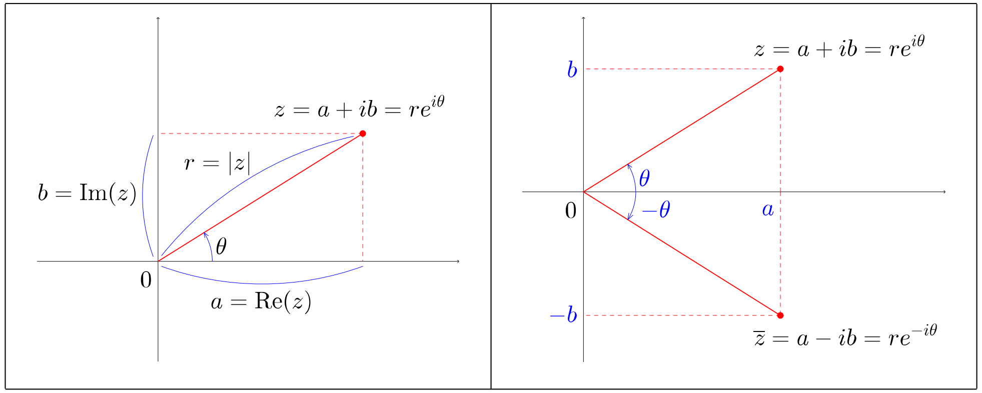
— Définitions :

$$\boxed{\begin{aligned} \forall x \in [-1, 1],\ \arccos(x) &= \text{l'unique } \theta \in [0, \pi] \text{ tel que } \cos(\theta) = x \\ \forall y \in [-1, 1],\ \arcsin(y) &= \text{l'unique } \theta \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \text{ tel que } \sin(\theta) = y \\ \forall t \in \mathbb{R},\ \arctan(t) &= \text{l'unique } \theta \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\text{ tel que } \tan(\theta) = t \end{aligned}}$$

— Résolution des équations trigonométriques :

$$\begin{aligned} \cos(\theta) = x &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \big(\theta = \arccos(x) + 2k\pi \text{ ou } \theta = -\arccos(x) + 2k\pi\big) \\ \sin(\theta) = y &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \big(\theta = \arcsin(y) + 2k\pi \text{ ou } \theta = \pi - \arcsin(y) + 2k\pi\big) \\ \tan(\theta) = t &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \arctan(t) + k\pi \end{aligned}$$

Formulaire de nombres complexes



1 Forme algébrique dans $\mathbb{C}$

— Écriture algébrique :

$$\boxed{z = a + ib} \quad \text{où} \quad \boxed{\begin{cases} a = \mathrm{Re}(z) \text{ est la partie réelle} \\ b = \mathrm{Im}(z) \text{ est la partie imaginaire} \end{cases}}$$

$$z + w = \big[\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w)\big] + \big[\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w)\big] i$$

$$z \times w = \big[\mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(w) - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)\big] + \big[\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(w) + \mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(w)\big] i$$

en particulier : $\boxed{i^2 = -1}$

— Conjugaison : $\boxed{\overline{a + ib} = a - ib}$

$$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z), \quad z - \overline{z} = i2\mathrm{Im}(z), \quad \boxed{\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overline{z \times w} = \overline{z} \times \overline{w}}$$

— Module : $\boxed{|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\boxed{|z| = \sqrt{z\overline{z}}} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{z} = \frac{1 \times \overline{z}}{z \times \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$$\boxed{|z + w| \leqslant |z| + |w|} \quad \text{et} \quad \boxed{|z \times w| = |z| \times |w|} \quad \text{et} \quad \boxed{|\overline{z}| = |z|}$$

2 Formes trigonométrique et exponentielle dans $\mathbb{C}^*$

— Le cercle unité (trigonométrique) : $\boxed{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$

$$\boxed{|e^{i\theta}| = 1}, \quad \boxed{\overline{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}}, \quad \boxed{-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}} \quad \text{et} \quad \boxed{e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}}$$

— Formules d'Euler :

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

— Factorisation par l'angle moitié :

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)/2}\big(\cdots + \ldots\big) = 2\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i(\alpha+\beta)/2}$$
$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)/2}\big(\cdots - \ldots\big) = i2\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i(\alpha+\beta)/2}$$

— Formule de Moivre :

$$\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)^n = \boxed{\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

— Écriture exponentielle :

$$\boxed{z = re^{i\theta}} \quad \text{où} \quad \boxed{\begin{cases} r = |z| \text{ est le module} \\ \theta \text{ est un argument de } z \neq 0 \end{cases}}$$

en particulier : $1 = e^{i0}$, $\boxed{i = e^{i\pi/2}}$ et $\boxed{-1 = e^{i\pi}}$

3 Résolution des équations du 2e degré à coeff. réels

— Équation : $(E) \quad az^2 + bz + c = 0$ où $\begin{cases} a \neq 0,\ b \text{ et } c \text{ sont des coefficients réels} \\ z \text{ est une inconnue complexe} \end{cases}$

— Discriminant : $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

— Résolution :

si $\Delta > 0$ alors (E) admet deux solutions réelles :

$$z = \tfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad z = \tfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

si $\Delta = 0$ alors (E) admet une seule solution réelle (double) :

$$z = \tfrac{-b}{2a}$$

si $\Delta < 0$ alors (E) admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z = \tfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{ou} \quad z = \tfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

— Somme et produit des solutions :

$$\boxed{\Big(z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les solutions de } z^2 - Sz + P = 0\Big) \iff \Big(z_1 + z_2 = S \text{ et } z_1 \times z_2 = P\Big)}$$