

Formulaire de trigonométrie

1 Cercle trigonométrique

— Ensemble de définition de la fonction tangente :

$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \\ = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$$

— Théorème de Thalès :

$$\forall \theta \in \mathcal{D}_{\tan}, \quad \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

— Théorème de Pythagore :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

— Corollaire de Thalès-Pythagore : $\forall \theta \in \mathcal{D}_{\tan}, \quad 1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$

— Parités et symétries :

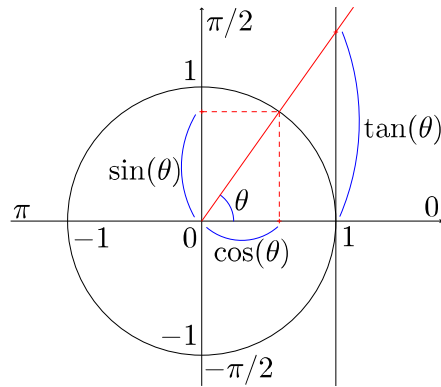
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \cos(-\theta) = \cos(\theta) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta) \\ \cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sin(-\theta) = -\sin(\theta) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta) \\ \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} \forall \theta \in \mathcal{D}_{\tan}, \quad \tan(-\theta) = -\tan(\theta) \\ \forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 1/\tan(\theta) \\ \forall \theta \in \mathcal{D}_{\tan}, \quad \tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta) \end{cases}$$

— Décalages et périodicités :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta) \\ \cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta) \\ \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta) \\ \sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta) \\ \sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} \forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -1/\tan(\theta) \\ \forall \theta \in \mathcal{D}_{\tan}, \quad \tan(\theta + \pi) = \tan(\theta) \end{cases}$$



2 Valeurs remarquables

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
cos	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{0}/2$
sin	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{4}/2$
tan	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	

3 Liens avec les nombres complexes

— Définition des fonctions cosinus et sinus :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta) = \operatorname{Re}(e^{i\theta}) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \operatorname{Im}(e^{i\theta})$$

— Formules d'Euler :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

— Formule de Moivre :

$$\forall (n, \theta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}, \quad \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n$$

— Factorisation par l'angle moitié :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2 \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i(\alpha+\beta)/2} \quad \text{et} \quad e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i(\alpha+\beta)/2}$$

4 Relations algébriques

— Formules d'addition :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta) \end{cases}$$

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{D}_{\tan}^2, \quad \alpha + \beta \in \mathcal{D}_{\tan} \implies \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \tan(\beta)}$$

— Formules de duplication :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\theta) \\ \sin(2\theta) = 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\forall \theta \in \mathcal{D}_{\tan}, \quad 2\theta \in \mathcal{D}_{\tan} \implies \tan(2\theta) = \frac{2 \tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}$$

— Formules de bisection :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos(\theta)}{2}} \quad \text{et} \quad \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}}$$

$$\forall \theta \in \mathcal{D}_{\tan}, \quad \frac{\theta}{2} \in \mathcal{D}_{\tan} \implies \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin(\theta)}{1 + \cos(\theta)} = \frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

— Transformation de produits en sommes (formules d'Euler) :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) \\ \cos(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta) \end{cases}$$

— Transformation de sommes en produits (factorisation par l'angle moitié) :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \\ \sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \\ \cos(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

5 Changement de variable de l'arc moitié

— Expressions en fonction de $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (formules de duplication) :

$$\forall \theta \in]-\pi, \pi[, \quad \cos(\theta) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\forall \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \quad \tan(\theta) = \frac{2t}{1 - t^2}$$

6 Inégalités de comparaison

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[, \quad \sin(\theta) \leq \theta \leq \tan(\theta)$$

7 Géométrie du triangle

Soit un triangle d'angles α, β, γ et de côtés opposés a, b, c respectivement.

— Loi des cosinus (théorème d'Al-Kashi) :

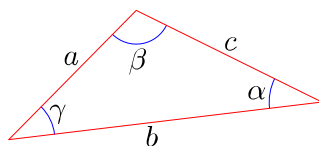
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

— Loi des sinus :

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

— Somme des angles (5^e postulat d'Euclide) :

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$



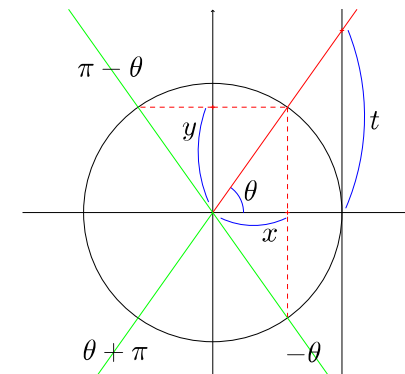
8 Fonctions trigonométriques réciproques

— Définition des fonctions trigonométriques réciproques :

$$\begin{aligned} \arccos : [-1, 1] &\rightarrow [0, \pi] \\ x &\mapsto \text{l'unique } \theta \in [0, \pi] \\ &\text{tel que } \cos(\theta) = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1, 1] &\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y &\mapsto \text{l'unique } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ &\text{tel que } \sin(\theta) = y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arctan : \mathbb{R} &\rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ t &\mapsto \text{l'unique } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ &\text{tel que } \tan(\theta) = t \end{aligned}$$



— Réciprocités :

$$\begin{cases} \forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos(x)) = x \\ \forall y \in [-1, 1], \sin(\arcsin(y)) = y \\ \forall t \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(t)) = t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall \theta \in [0, \pi], \arccos(\cos(\theta)) = \theta \\ \forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin(\theta)) = \theta \\ \forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan(\theta)) = \theta \end{cases}$$

— Résolution d'équations trigonométriques d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\theta) = x \iff \left(\theta \equiv \arccos(x) [2\pi] \text{ ou } \theta \equiv -\arccos(x) [2\pi] \right)$$

$$\forall y \in [-1, 1], \quad \sin(\theta) = y \iff \left(\theta \equiv \arcsin(y) [2\pi] \text{ ou } \theta \equiv \pi - \arcsin(y) [2\pi] \right)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} \tan(\theta) = t &\iff \left(\theta \equiv \arctan(t) [2\pi] \text{ ou } \theta \equiv \arctan(t) + \pi [2\pi] \right) \\ &\iff \theta \equiv \arctan(t) [\pi] \end{aligned}$$

— Quelques relations :

$$\begin{cases} \forall x \in [-1, 1], \arccos(-x) = \pi - \arccos(x) \\ \forall y \in [-1, 1], \arcsin(-y) = -\arcsin(y) \\ \forall t \in \mathbb{R}, \arctan(-t) = -\arctan(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall x \in [-1, 1], \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2} \\ \forall y \in [-1, 1], \cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1 - y^2} \end{cases}$$

$$\forall a \in [-1, 1], \arccos(a) + \arcsin(a) = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } t > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$