

Liste de dérivées et de primitives usuelles

1 Dérivées

1.1 Dérivées usuelles

$f(x)$	\mathcal{D}_f ($\subset \mathcal{D}_f$)	$\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$
$a \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}	0
x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}^*	$-nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\begin{cases} \mathbb{R}_+^* (\subset \mathbb{R}_+) & \text{si } n \text{ pair} \\ \mathbb{R}^* (\subset \mathbb{R}) & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$	\mathbb{R}_+^*	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\ln(x)$	\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{x}$
$\ln x $	\mathbb{R}^*	$\frac{1}{x}$
$\exp(x) = e^x$	\mathbb{R}	$\exp(x) = e^x$
$a^x = e^{x \ln(a)}$ avec $a > 0$	\mathbb{R}	$\ln(a)a^x$
$\cos(x)$	\mathbb{R}	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	\mathbb{R}	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\arctan(x)$	\mathbb{R}	$\frac{1}{1+x^2}$
$ x = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$	$\mathbb{R}^* (\subset \mathbb{R})$	$\frac{x}{ x } = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1.2 Propriétés de calcul de dérivées

Soient f et g deux fonctions réelles d'une variable.

— Linéarité : pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' \quad \text{sur } \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$$

— Produit :

$$(fg)' = f'g + fg' \quad \text{sur } \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$$

— Inverse :

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \quad \text{sur } \mathcal{D}_f \cap \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \neq 0\}$$

— Quotient :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{sur } \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \neq 0\}$$

— Composée :

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f) \quad \text{sur } \mathcal{D}_f \cap \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in \mathcal{D}_g\}$$

Remarque. On retrouve en particulier $(1/u)' = -u'/u^2$, $(\sqrt{u})' = u'/(2\sqrt{u})$, $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$, $(\ln(u))' = u'/u$, $(e^u)' = u' e^u$, etc.

— Bijection réciproque :

Si $f : A \rightarrow B$ est bijective où A et B sont deux parties de \mathbb{R} alors

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \quad \text{sur } \{y \in B \mid f^{-1}(y) \in \mathcal{D}_f \text{ et } f'(f^{-1}(y)) \neq 0\}$$

Conseil. On retrouve cette formule en dérivant la relation $f \circ f^{-1} = \text{Id}_B$.

Remarque. En particulier, si f est dérivable sur un intervalle I avec $f' > 0$ (ou bien $f' < 0$) sur I alors $f : I \rightarrow f(I)$ est bijective d'après le théorème de la bijection et f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(I)$.

2 Primitives

2.1 Primitives usuelles

$f(x)$	I	$\int_I f(t)dt = F(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$
$a \in \mathbb{R}$	$] -\infty, +\infty[$	$ax + C$
x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	$] -\infty, +\infty[$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\ln x + C$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ avec $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$
$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\begin{cases}]0, +\infty[& \text{si } n \text{ pair} \\] -\infty, +\infty[& \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$	$\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + C = \frac{n}{n+1} \sqrt[n+1]{x} + C$
$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$	$]0, +\infty[$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\ln(x)$	$]0, +\infty[$	$x \ln(x) - x + C$
$\exp(x) = e^x$	$] -\infty, +\infty[$	$\exp(x) + C = e^x + C$
$a^x = e^{x \ln(a)}$ avec $a > 0$	$] -\infty, +\infty[$	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$
$\cos(x)$	$] -\infty, +\infty[$	$\sin(x) + C$
$\sin(x)$	$] -\infty, +\infty[$	$-\cos(x) + C$
$\tan(x)$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$	$-\ln \cos(x) + C$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$	$\tan(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$] -\infty, +\infty[$	$\arctan(x) + C$
$ x = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$	$] -\infty, +\infty[$	$\frac{ x x}{2} + C = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + C & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2} + C & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

2.2 Propriétés de calcul d'intégrales

— Linéarité :

Si f et g sont continues sur $[a, b]$ alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

— Relation de Chasles :

Si f est continue sur un intervalle I alors pour tout $(a, b, c) \in I^3$,

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

— Intégration par parties :

Si u et v sont dérivables (donc continues) sur $[a, b]$ et si u' et v' sont continues sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

— Changement de variable :

Soit φ une fonction réelle définie sur un intervalle I vérifiant

(i) φ est dérivable (donc continue) sur I et φ' est continue sur I ,

(ii) il existe $(\alpha, \beta) \in I^2$ tels que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$.

Si f est continue sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

en posant $x = \varphi(t)$ et donc $dx = \varphi'(t)dt$.

Remarque. On retrouve en particulier $\int u' u^\alpha = u^{\alpha+1}/(\alpha+1) + C$, $\int u'/u = \ln|u| + C$, $\int u' e^u = e^u + C$, etc.

Remarque. En particulier, si ψ est dérivable sur $[a, b]$ et ψ' est continue sur $[a, b]$ avec $\psi' > 0$ (ou bien $\psi' < 0$) sur $[a, b]$ (donc $\psi : [a, b] \rightarrow \psi([a, b])$ est bijective d'après le théorème de la bijection et ψ^{-1} est dérivable sur $\psi([a, b])$) et si g est continue sur $\psi([a, b])$ alors

$$\int_a^b g(\psi(x)) dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} \frac{g(t)}{\psi'(\psi^{-1}(t))} dt$$

en posant $\psi(x) = t$ (c'est-à-dire $x = \psi^{-1}(t)$).