Liste de dérivées et de primitives usuelles

1 Dérivées

1.1 Dérivées usuelles

$f(x)$	$\mathscr{D}_{f'}\ (\subset \mathscr{D}_f)$	$\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x)$
$a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x^n avec $n \in \mathbb{N}^\star$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$	$\mathbb{R}^\star$	$-nx^{-n-1} = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$	$\begin{cases} \mathbb{R}_+^\star\ (\subset \mathbb{R}_+) & \text{si } n \text{ pair} \\ \mathbb{R}^\star\ (\subset \mathbb{R}) & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^\star$	$\mathbb{R}_+^\star$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^\star$	$\dfrac{1}{x}$
$\exp(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$\exp(x) = e^x$
$a^x = e^{x\ln(a)}$ avec $a > 0$	$\mathbb{R}$	$\ln(a)a^x$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\lvert x \rvert = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$	$\mathbb{R}^\star\ (\subset \mathbb{R})$	$\dfrac{x}{\lvert x \rvert} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1.2 Propriétés de calcul de dérivées

Soient f et g deux fonctions réelles d'une variable.

— Linéarité : pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\boxed{(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'} \quad \text{sur} \quad \boxed{\mathscr{D}_{f'} \cap \mathscr{D}_{g'}}$$

— Produit :

$$\boxed{(fg)' = fg' + f'g} \quad \text{sur} \quad \boxed{\mathscr{D}_{f'} \cap \mathscr{D}_{g'}}$$

— Inverse :

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}} \quad \text{sur} \quad \boxed{\mathscr{D}_{f'} \cap \{x \in \mathscr{D}_f \mid f(x) \neq 0\}}$$

— Quotient :

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}} \quad \text{sur} \quad \boxed{\mathscr{D}_{f'} \cap \mathscr{D}_{g'} \cap \{x \in \mathscr{D}_g \mid g(x) \neq 0\}}$$

— Composée :

$$\boxed{(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)} \quad \text{sur} \quad \boxed{\mathscr{D}_{f'} \cap \{x \in \mathscr{D}_f \mid f(x) \in \mathscr{D}_{g'}\}}$$

Remarque. On retrouve en particulier $(1/u)' = -u'/u^2$, $(\sqrt{u})' = u'/(2\sqrt{u})$, $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$, $(\ln(u))' = u'/u$, $(e^u)' = u'e^u$, etc.

— Bijection réciproque :
Si $f : A \to B$ est bijective où A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ alors

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}} \quad \text{sur} \quad \boxed{\left\{y \in B \mid f^{-1}(y) \in \mathscr{D}_{f'} \text{ et } f'(f^{-1}(y)) \neq 0\right\}}$$

Conseil. On retrouve cette formule en dérivant la relation $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B$.
Remarque. En particulier, si f est dérivable sur un intervalle I avec $f' > 0$ (ou bien $f' < 0$) sur I alors $f : I \to f(I)$ est bijective d'après le théorème de la bijection et f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(I)$.

2 Primitives

2.1 Primitives usuelles

$f(x)$	I	$\int_?^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$
$a \in \mathbb{R}$	$]-\infty, +\infty[$	$ax + C$
x^n avec $n \in \mathbb{N}^\star$	$]-\infty, +\infty[$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\dfrac{1}{x} = x^{-1}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\ln\lvert x\rvert + C = \begin{cases} \ln(x) + C & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + C & \text{si } x < 0 \end{cases}$
$\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$ avec $n \in \mathbb{N}^\star \setminus \{1\}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\dfrac{x^{-n+1}}{-n+1} + C = \dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$
$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$	$\begin{cases} [0, +\infty[& \text{si } n \text{ pair} \\ ]-\infty, +\infty[& \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$	$\dfrac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + C = \dfrac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}} + C$
$x^\alpha = e^{\alpha\ln(x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^\star \setminus \{-1\}$	$]0, +\infty[$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\ln(x)$	$]0, +\infty[$	$x\ln(x) - x + C$
$\exp(x) = e^x$	$]-\infty, +\infty[$	$\exp(x) + C = e^x + C$
$a^x = e^{x\ln(a)}$ avec $a > 0$	$]-\infty, +\infty[$	$\dfrac{a^x}{\ln(a)} + C$
$\cos(x)$	$]-\infty, +\infty[$	$\sin(x) + C$
$\sin(x)$	$]-\infty, +\infty[$	$-\cos(x) + C$
$\tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert + C$
$1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$	$\tan(x) + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$]-\infty, +\infty[$	$\arctan(x) + C$
$\lvert x\rvert = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$	$]-\infty, +\infty[$	$\dfrac{\lvert x\rvert x}{2} + C = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + C & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\frac{x^2}{2} + C & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

2.2 Propriétés de calcul d'intégrales

— Linéarité :
Si f et g sont continues sur $[a, b]$ alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\boxed{\int_a^b \Big(\lambda f(x) + \mu g(x)\Big)\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$$

— Relation de Chasles :
Si f est continue sur un intervalle I alors pour tout $(a, b, c) \in I^3$,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x}$$

— Intégration par parties :
Si u et v sont dérivables (donc continues) sur $[a, b]$ et si u' et v' sont continues sur $[a, b]$ alors

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x}$$

— Changement de variable :
Soit φ une fonction réelle définie sur un intervalle I vérifiant

(i) φ est dérivable (donc continue) sur I et φ' est continue sur I,

(ii) il existe $(\alpha, \beta) \in I^2$ tels que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$.

Si f est continue sur $[a, b]$ alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t}$$

en posant $\boxed{x = \varphi(t)}$ et donc $\boxed{\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t}$.
Remarque. On retrouve en particulier $\int u'u^\alpha = u^{\alpha+1}/(\alpha+1) + C$, $\int u'/u = \ln\lvert u\rvert + C$, $\int u'e^u = e^u + C$, etc.
Remarque. En particulier, si ψ est dérivable sur $[a, b]$ et ψ' est continue sur $[a, b]$ avec $\psi' > 0$ (ou bien $\psi' < 0$) sur $[a, b]$ (donc $\psi : [a, b] \to \psi([a, b])$ est bijective d'après le théorème de la bijection et ψ^{-1} est dérivable sur $\psi([a, b])$) et si g est continue sur $\psi([a, b])$ alors

$$\int_a^b g(\psi(x))\mathrm{d}x = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} \frac{g(t)}{\psi'(\psi^{-1}(t))}\mathrm{d}t$$

en posant $\psi(x) = t$ (c'est-à-dire $x = \psi^{-1}(t)$).