Formulaire de développements limités

1 Manipulation des petits o

Soient $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\begin{aligned} h^{n+1} &= \underset{h\to 0}{o}\big(h^n\big) \\ \underset{h\to 0}{o}\big(h^{n+1}\big) &= \underset{h\to 0}{o}\big(h^n\big)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda \times \underset{h\to 0}{o}\big(h^n\big) &= \underset{h\to 0}{o}\big(h^n\big) \\ h^k \times \underset{h\to 0}{o}\big(h^n\big) &= \underset{h\to 0}{o}\big(h^{n+k}\big) \\ \underset{h\to 0}{o}\big(h^k\big) \times \underset{h\to 0}{o}\big(h^n\big) &= \underset{h\to 0}{o}\big(h^{n+k}\big)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\underset{h\to 0}{o}\big(h^n\big) + \underset{h\to 0}{o}\big(h^n\big) = \underset{h\to 0}{o}\big(h^n\big)}$$

$$\boxed{\underset{h\to 0}{o}\Big(\lambda h^n + \underset{h\to 0}{o}\big(h^n\big)\Big) = \underset{h\to 0}{o}\big(h^n\big)}$$

Attention : $\boxed{\underset{h\to 0}{o}\big(h^n\big) - \underset{h\to 0}{o}\big(h^n\big) = \underset{h\to 0}{o}\big(h^n\big)}$!

2 Propriétés des développements limités

Soient $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ et f une fonction réelle définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.

— Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ alors ce $\mathrm{DL}_n(a)$ est unique.

— Si f admet un $\mathrm{DL}_{n+k}(a)$ alors f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$.

— f admet un $\mathrm{DL}_0(a)$ si et seulement si f est continue en a ou admet un prolongement par continuité en a, et dans ce cas $f(a+h) = f(a) + \underset{h\to 0}{o}\big(1\big)$.

— f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ si et seulement si f (ou son prolongement par continuité en a) est dérivable en a, et dans ce cas $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \underset{h\to 0}{o}\big(h\big)$.

— Si f est paire (resp. impaire) et f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors tous les termes d'ordre impair (resp. pair) de son $\mathrm{DL}_n(0)$ sont nuls.

3 Formule de Taylor-Young

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors pour tout $a \in I$ la fonction f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ et

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \underset{h\to 0}{o}\Big(h^n\Big) \\ &= f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{6}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \underset{h\to 0}{o}\Big(h^n\Big).\end{aligned}$$

4 Opérations sur les développements limités

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f, g deux fonctions réelles définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.

— Si f et g admettent un $\mathrm{DL}_n(a)$ alors $f+g$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ obtenu en additionnant les $\mathrm{DL}_n(a)$ de f et g.

— Si f et g admettent un $\mathrm{DL}_n(a)$ alors $f \times g$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ obtenu en multipliant les $\mathrm{DL}_n(a)$ de f et g.

— Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ et g admet un $\mathrm{DL}_n(f(a))$ alors $g \circ f$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ obtenu en composant les DL_n de f et g.

— Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ et g admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ avec $g(a) \neq 0$ alors f/g admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ obtenu à l'aide de

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f(a+h)}{g(a)} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{g(a+h)-g(a)}{g(a)}\right)}$$

— Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ et F est une primitive de f alors F admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$ obtenu en primitivant le $\mathrm{DL}_n(a)$ de f.

— Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ et f' admet un $\mathrm{DL}_{n-1}(a)$ alors le $\mathrm{DL}_{n-1}(a)$ de f' s'obtient en dérivant le $\mathrm{DL}_n(a)$ de f.

5 Équivalents de développements limités

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ non nul alors f est équivalente au voisinage de a au terme non nul de plus petit ordre de son $\mathrm{DL}_n(a)$.

Remarque : en particulier, les développements limités permettent d'obtenir des équivalents et de calculer des limites.

6 Contre-exemples utiles

— $\boxed{f : x \mapsto e^{-1/x^2}}$ admet un prolongement continu (avec $f(0) = 0$) de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ son $\mathrm{DL}_n(0)$ est $f(x) = 0 + o_{x\to 0}(x^n)$ mais $f \neq 0$. Ainsi, deux fonctions différentes peuvent avoir le même $\mathrm{DL}_n(a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— $\boxed{f : x \mapsto x^3 \sin(1/x)}$ admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ car $f(x) = o_{x\to 0}(x^2)$ et admet un prolongement continu (avec $f(0) = 0$) de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ mais qui n'est pas deux fois dérivable en 0. Ainsi, l'existence du $\mathrm{DL}_2(a)$ n'implique pas l'existence de la dérivée deuxième en a (contrairement à l'existence du $\mathrm{DL}_1(a)$ qui est équivalent à l'existence de la dérivée première en a), l'hypothèse de la formule de Taylor-Young est suffisante mais pas nécessaire pour justifier l'existence du $\mathrm{DL}_n(a)$, et l'existence du $\mathrm{DL}_n(a)$ n'implique pas l'existence du $\mathrm{DL}_{n-1}(a)$ pour la dérivée.

7 Liste de développements limités usuels

Soit $n \in \mathbb{N}$.

— Sommes des termes de suites géométriques :

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)}$$

On obtient le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison x :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x}x^n = \frac{1}{1-x} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right).$$

De même pour le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-x$, ou à l'aide du changement de variable $x \mapsto -x$ dans le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

— Fonctions binomiales avec $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)\end{aligned}}$$

On obtient ce $\mathrm{DL}_n(0)$ à l'aide de la formule de Taylor-Young avec $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ et donc $f^{(n)} : x \mapsto \left(\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)\right)(1+x)^{\alpha-n}$ (par récurrence). En particulier, on retrouve le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ si $\alpha = -1$ et on a si $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}$$

— Fonction logarithme népérien :

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n+1}\right)}$$

On obtient ce $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ à l'aide de la formule de Taylor-Young avec $f : x \mapsto \ln(1+x)$ et donc $f^{(n+1)} : x \mapsto (-1)^n n!(1+x)^{-(n+1)}$ (par récurrence), ou par primitivation du $\mathrm{DL}_n(0)$ de $f' : x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

— Fonction exponentielle naturelle :

$$\boxed{\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)}$$

On obtient ce $\mathrm{DL}_n(0)$ à l'aide de la formule de Taylor-Young avec $f : x \mapsto \exp(x)$ et donc $f^{(n)} : x \mapsto \exp(x)$ (par récurrence).

— Fonctions trigonométriques :

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)}$$

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)}$$

On obtient le $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de cos et le $\mathrm{DL}_{2n+2}(0)$ de sin à l'aide de la formule de Taylor-Young car $\cos^{(n)} : x \mapsto \cos(x + n\frac{\pi}{2})$ et $\sin^{(n)} : x \mapsto \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ (par récurrence).

$$\boxed{\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)}$$

On obtient le DL(0) de tan par quotient des DL(0) de sin et cos car $\cos(0) \neq 0$ ou (méthode plus efficace) par primitivation successive de $\tan' : x \mapsto 1 + \tan^2(x)$ en partant de $\tan(x) = x + o_{x\to 0}(x^2)$ (car $\tan(x) \sim_{x\to 0} x$ et tan est impaire).

$$\boxed{\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)}$$

On obtient ce $\mathrm{DL}_{2n+2}(0)$ par primitivation du $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de $\arctan' : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ obtenu à l'aide du changement de variable $x \mapsto x^2$ dans le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.