Liste de lois de probabilité usuelles

1 Lois de probabilité finies

Variable aléatoire X	Paramètres	Support $X(\Omega)$	Loi de probabilité $(k \in X(\Omega)) \mapsto \mathrm{P}(X=k)$	Espérance $\mathrm{E}(X)$	Variance $\mathrm{V}(X)$	Modélisation
certaine $X \hookrightarrow a$	$a \in \mathbb{R}$	$\{a\}$	$\mathrm{P}(X=a)=1$	a	0	• résultat constant • loi des grands nombres : la moyenne de n variables aléatoires indépendantes de même loi «tend» quand $n \to +\infty$ vers une loi certaine (égale à leur espérance)
uniforme $X \hookrightarrow \mathscr{U}(n)$	$n \in \mathbb{N}^\star$	$[\![1, n]\!]$	$\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\left[\dfrac{n^2-1}{12}\right]$	• résultats équiprobables • lancer d'un dé équilibré à n faces numérotées de 1 à n • numéro obtenu en tirant un jeton dans une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n
Bernoulli $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$	$p \in [0,1]$ (et $q=1-p$)	$\{0,1\}$	$\mathrm{P}(X=1)=p$ $\mathrm{P}(X=0)=q$	p	pq	• épreuve de Bernoulli • résultats binaires (succès ou échec) • lancer d'une pièce déséquilibrée où $X(\text{«pile»})=1$ et $X(\text{«face»})=0$ (p =probabilité d'obtenir pile)
binomiale $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$	$n \in \mathbb{N}$ $p \in [0,1]$ (et $q=1-p$)	$[\![0, n]\!]$	$\mathrm{P}(X=k)=\dbinom{n}{k} p^k q^{n-k}$	np	npq	• schéma de Bernoulli • somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(p)$ • nombre de piles obtenus en lançant n pièces déséquilibrées identiques (p =probabilité d'obtenir pile) • nombre de succès de n tirages avec remise (p =proba. d'un succès)
hypergéométrique $X \hookrightarrow \mathscr{H}(N,n,p)$	$N \in \mathbb{N}$ $n \in [\![0, N]\!]$ $p \in [0,1]$ tels que $Np \in \mathbb{N}$ (et $Nq=N-Np$)	$\left[\begin{array}{c}[\![\max\{0, n-Nq\}, \\ \min\{Np, n\}]\!]\end{array}\right]$ $\subset [\![0, n]\!]$	$\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{\dbinom{Np}{k}\dbinom{Nq}{n-k}}{\dbinom{N}{n}}$	np	$\left[npq\dfrac{N-n}{N-1}\right]$	• nombre de boules blanches obtenues en tirant simultanément n boules dans une urne contenant Np blanches et Nq noires • nombre de succès de n tirages sans remise parmi N objets (p =proba. de succès au 1^{er} tirage) • $\mathscr{H}(N,n,p) \approx \mathscr{B}(n,p)$ lorsque $N \to +\infty$

$[\,\star\,]$: Formules non exigibles mais à savoir démontrer (pour la variance de la loi uniforme : formule de Koenig-Huygens et théorème de transfert puis sommes des premiers entiers et des premiers carrés ; pour la variance de la loi hypergéométrique (et de la loi binomiale) : calcul de $\mathrm{E}(X(X-1))$ avec deux fois la formule du pion puis la formule de Vandermonde (la formule du binôme de Newton pour la loi binomiale) ensuite linéarité de l'espérance et formule de Koenig-Huygens).

2 Lois de probabilité discrètes

Variable aléatoire X	Paramètres	Support $X(\Omega)$	Loi de probabilité $(k \in X(\Omega)) \mapsto \mathrm{P}(X=k)$	Espérance $\mathrm{E}(X)$	Variance $\mathrm{V}(X)$	Modélisation
Poisson $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$	$\lambda \in [0,+\infty[$	$\mathbb{N}$	$\mathrm{P}(X=k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ	• décompte d'événements rares • nombre d'événements se produisant dans un intervalle de temps fixé (λ =nombre moyen d'apparitions) • $\mathscr{B}(n,\lambda/n) \approx \mathscr{P}(\lambda)$ lorsque $n \to +\infty$
géométrique $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$	$p \in [0,1]$ (et $q = 1-p$)	$\mathbb{N}^\star$	$\mathrm{P}(X=k) = q^{k-1}p$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	• numéro du 1er succès d'une suite illimitée de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(p)$ • loi sans mémoire : $\mathrm{P}(X \geqslant k_0 + k \mid X \geqslant k_0) = \mathrm{P}(X \geqslant k)$

3 Lois de probabilité à densité

Variable aléatoire X	Paramètres	Support $X(\Omega)$	Fonction de densité $(t \in X(\Omega)) \mapsto f_X(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{P}(X \leqslant t)$	Espérance $\mathrm{E}(X)$	Variance $\mathrm{V}(X)$	Modélisation
uniforme $X \hookrightarrow \mathscr{U}(a,b)$	$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a<b$	$[a,b]$	$f_X(t) = \dfrac{1}{b-a}$	$\dfrac{b+a}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$	• choix d'un nombre réel au hasard dans l'intervalle $[a,b]$ (uniformément réparti) • générateurs informatiques de nombres aléatoires
exponentielle $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$	$\lambda \in]0,+\infty[$	$\mathbb{R}_+$	$f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$	• durée de vie d'un phénomène sans vieillissement ($\lambda = 1/$(durée de vie moyenne)) • temps d'attente dans une file • loi sans mémoire : $\mathrm{P}(X \geqslant t_0 + t \mid X \geqslant t_0) = \mathrm{P}(X \geqslant t)$ • $n\mathscr{G}(\lambda/n) \approx \mathscr{E}(\lambda)$ lorsque $n \to +\infty$
normale ou gaussienne $X \hookrightarrow \mathscr{N}(\mu,\sigma^2)$	$\mu \in \mathbb{R}$ $\sigma \in]0,+\infty[$	$\mathbb{R}$	$f_X(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$	μ	σ^2	• résultats répartis «en cloche» • distribution statistique pour une population de grande taille • théorème central limite : la somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi «tend» quand $n \to +\infty$ vers une gaussienne