Géométrie du plan et de l'espace

Le but de la géométrie est de décrire des parties d'un ensemble de points (par exemple un cercle ou un triangle dans un plan, une droite ou une sphère dans l'espace, etc.). Pour ce faire, une méthode (appelée «géométrie analytique», due au mathématicien et philosophe français René Descartes) consiste à décrire les objets géométriques par des nombres réels (coordonnées, équations cartésiennes, représentations paramétriques, etc.) avec lesquels on peut faire des calculs.

L'objectif de ce cours est double. D'une part, il fournit de nombreux exemples d'applications des systèmes linéaires et des matrices (les méthodes utilisées ne sont donc pas toujours les plus efficaces ; le but est surtout de réviser certaines méthodes élémentaires d'algèbre linéaire : écriture matricielle de systèmes linéaires, échelonnage par la méthode du pivot de Gauss, rang, nombre de solutions, calcul matriciel, etc.). D'autre part, il sert d'introduction aux espaces vectoriels, aux familles de vecteurs et au produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ qui généralisent certaines notions de ce cours.

1 Calcul vectoriel

En géométrie analytique, les vecteurs sont un outil de calculs très efficace. Cette section présente les vecteurs de manière purement abstraite, sans aucune interprétation géométrique.

1.1 Le plan euclidien et l'espace euclidien

Définition 1

*Le **plan euclidien** est l'ensemble :*

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \overrightarrow{v} = (x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R} \right\}.$$

*Les éléments du plan euclidien sont appelés des **vecteurs du plan**, on les note $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ (ou simplement $\boldsymbol{v}$ s'il n'y a pas d'ambiguïtés). Pour chaque $\overrightarrow{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, x est appelée la **première composante** du vecteur $\overrightarrow{v}$ et y la **deuxième composante**. En particulier, le vecteur dont les deux composantes sont égales à zéro est appelé le **vecteur nul** et on le note $\overrightarrow{\mathbf{0}}$.*

Le plan euclidien est muni des deux opérations suivantes :

— *la **multiplication par un scalaire** définie par :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \overrightarrow{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda \overrightarrow{v} = (\lambda x, \lambda y),$$

— *l'**addition de deux vecteurs** définie par :*

$$\forall \overrightarrow{v_1} = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \overrightarrow{v_2} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Remarque. On retrouve deux opérations définies sur les matrices. En effet, chaque vecteur du plan euclidien peut être vue comme une matrice de 1 ligne et 2 colonnes (à une virgule près), et le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ peut être assimilé à l'ensemble $\mathscr{M}_{1,2}(\mathbb{R})$. Les calculs sont les mêmes, et on retrouve les mêmes propriétés.

Propriété 1

Les calculs avec les vecteurs du plan ont les propriétés suivantes :

- $\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2, \quad 0\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \quad et \quad 1\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \iff \left(\lambda = 0 \text{ ou } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}\right)$,
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2, \quad (\lambda + \mu)\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{v} \quad et \quad (\lambda\mu)\overrightarrow{v} = \lambda\left(\mu\overrightarrow{v}\right)$,
- ***commutativité*** *:* $\forall \overrightarrow{v_1} \in \mathbb{R}^2,\ \forall \overrightarrow{v_2} \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1}$,
- ***associativité*** *:* $\forall \overrightarrow{v_1} \in \mathbb{R}^2,\ \forall \overrightarrow{v_2} \in \mathbb{R}^2,\ \forall \overrightarrow{v_3} \in \mathbb{R}^2 \quad \left(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}\right) + \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_1} + \left(\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}\right)$,
- ***élément neutre*** *:* $\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$,
- ***opposé*** *:* $\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{v} + \left(-\overrightarrow{v}\right) = \left(-\overrightarrow{v}\right) + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \quad \text{où} \quad -\overrightarrow{v} = -1\overrightarrow{v}$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \overrightarrow{v_1} \in \mathbb{R}^2,\ \forall \overrightarrow{v_2} \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda\left(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}\right) = \lambda\overrightarrow{v_1} + \lambda\overrightarrow{v_2}$.

Démonstration. Il suffit d'écrire les composantes de chaque vecteur et d'utiliser les propriétés de calculs dans $\mathbb{R}$.

□

Définition 2

*L'**espace euclidien** est l'ensemble :*

$$\mathbb{R}^3 = \left\{\overrightarrow{v} = (x, y, z) \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R} \text{ et } z \in \mathbb{R}\right\}.$$

*Pour chaque **vecteur de l'espace** $\overrightarrow{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^2$, x, y et z sont appelées les trois **composantes** de $\overrightarrow{v}$. On note $\overrightarrow{\mathbf{0}} = (0, 0, 0)$ le **vecteur nul**. Enfin, l'espace euclidien est muni de la **multiplication par un scalaire** et de l'**addition de deux vecteurs** définies comme dans le plan euclidien et qui vérifient les mêmes propriétés de calculs qu'avec les vecteurs du plan (cf. propriété 1).*

Important. Il ne faut pas confondre le plan (ou l'espace) euclidien avec un plan (ou un espace) géométrique. Un plan (ou un espace) géométrique (on dit aussi «affine») est un ensemble de points qui n'est pas muni d'opérations. Autrement dit, on ne calcule pas avec des points, seulement avec des vecteurs. On verra plus loin comment passer des points aux vecteurs et inversement. En géométrie, les vecteurs peuvent être vus comme des outils de calculs abstraits permettant de décrire des sous-ensembles de points.

1.2 Colinéarité et coplanarité

Définition 3

*Deux vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ du plan ou de l'espace sont dits **colinéaires** lorsqu'il existe deux scalaires $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ non nuls simultanément (c'est-à-dire qu'au moins l'un des deux est non nul) tels que la **combinaison linéaire** $\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2}$ est égale au vecteur nul, c'est-à-dire :*

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(0, 0)\right\}, \quad \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}.$$

Exemple. Les vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u_1} = (1, 2, 3)$ et $\overrightarrow{u_2} = (2, 4, 6)$ sont colinéaires car :

$$2\overrightarrow{u_1} = (2, 4, 6) = \overrightarrow{u_2} \quad \text{donc} \quad 2\overrightarrow{u_1} + (-1)\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{0}.$$

Les vecteurs du plan $\overrightarrow{w_1} = (1, 2)$ et $\overrightarrow{w_2} = (3, 4)$ ne sont pas colinéaires. En effet, si on cherche $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tels que $\lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{0}$, on obtient le système linéaire suivant :

$$(\lambda_1 + 3\lambda_2, 2\lambda_1 + 4\lambda_2) = (0, 0) \iff \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or $\det(A) = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2 \neq 0$ donc la matrice A est inversible et ce système linéaire admet une unique solution qui est égale à :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, il n'existe pas de scalaires $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ tels que $\lambda_1 \overrightarrow{w_1} + \lambda_2 \overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{0}$.

Remarque. Si l'un des deux vecteurs est nul, par exemple $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont colinéaires car on a bien $\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$ en posant $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 0) \neq (0, 0)$.

Propriété 2

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont colinéaires si et seulement s'ils sont proportionnels, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\exists t \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{v_1} = t\overrightarrow{v_2}.$$

Démonstration. On raisonne par double implication.

- $\Leftarrow$ On suppose qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v_1} = t\overrightarrow{v_2}$ et on cherche (par analyse-synthèse) deux scalaires $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tels que $\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$. Il suffit de poser $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, -t) \neq (0, 0)$.
- $\Rightarrow$ On suppose qu'il existe deux scalaires $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tels que $\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$ et on cherche (par analyse-synthèse) un réel t tel que $\overrightarrow{v_1} = t\overrightarrow{v_2}$. Par l'absurde, on remarque que $\lambda_1 \neq 0$ (si $\lambda_1 = 0$ alors $\lambda_2 \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$, donc $\lambda_2 = 0$, car $\overrightarrow{v_2} \neq \overrightarrow{0}$, ce qui est absurde puisque $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$). Il suffit donc de poser $t = -\lambda_2/\lambda_1$.

On a bien démontré l'équivalence.

□

Remarque. La propriété 2 est pratique pour vérifier rapidement que deux vecteurs non nuls sont colinéaires (c'est souvent la définition donnée au collège et au lycée) mais elle a deux défauts :

- l'implication $\Rightarrow$ est fausse si $\overrightarrow{v_1} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$, en effet dans ce cas $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont bien colinéaires (avec la solution évidente $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 1) \neq (0, 0)$) mais il n'existe pas de réel t tel que $\overrightarrow{v_1} = t\overrightarrow{v_2}$;
- elle ne se généralise pas aux familles de plus de deux vecteurs (voir plus loin).

On tâchera donc d'éviter le plus possible d'utiliser la propriété 2. La bonne définition de la colinéarité à apprendre est celle de la définition 3 qui se généralise à tout espace vectoriel.

Important. Dans la définition 3, il faut reconnaître que la condition $\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$ est un système linéaire de deux ou trois équations (deux pour des vecteurs du plan, et trois pour des vecteurs de l'espace) à deux inconnues (λ_1 et λ_2). On remarque que ce système linéaire est homogène (c'est-à-dire que tous les seconds membres sont égaux à zéro), donc il admet comme solution évidente $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$. Par conséquent, toutes les équations auxiliaires sont compatibles (sinon il n'y aurait pas de solutions) et il n'y a que deux cas possibles :

- au moins une des deux inconnues est auxiliaire (lorsque le rang est strictement inférieur à 2), dans ce cas $\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$ admet une infinité de solutions, en particulier il en existe au moins une (λ_1, λ_2) différente de la solution évidente $(0, 0)$, donc les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont colinéaires ;
- toutes les inconnues sont principales (lorsque le rang est égal à 2), dans ce cas $\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$ admet une unique solution qui est la solution évidente $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$, donc les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ ne sont pas colinéaires.

On en déduit le théorème suivant.

Théorème 1

Deux vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont colinéaires si et seulement si le rang du système linéaire $\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$ est strictement plus petit que 2.

En particulier, dans le cas de deux vecteurs du plan, puisqu'on a un système linéaire de deux équations à deux inconnues, on peut caractériser le nombre de solutions à l'aide du déterminant.

Corollaire 1

Soient $\overrightarrow{v_1} = (x_1, y_1)$ et $\overrightarrow{v_2} = (x_2, y_2)$ deux vecteurs du plan. Alors $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont colinéaires si et seulement si $x_1y_2 - y_1x_2 = 0$.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0} &\iff (\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2, \lambda_1y_1 + \lambda_2y_2) = (0,0) \\ &\iff \begin{cases} x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 = 0 \\ y_1\lambda_1 + y_2\lambda_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On raisonne par double implication.

- $\Rightarrow$ Si $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont colinéaires alors ce système linéaire admet une autre solution que la solution évidente $(\lambda_1, \lambda_2) = (0,0)$, donc il admet une infinité de solutions. On en déduit que le rang n'est pas maximal et que la matrice A n'est pas inversible, donc $\det(A) = x_1y_2 - y_1x_2 = 0$.
- $\Leftarrow$ Si $\det(A) = x_1y_2 - y_1x_2 = 0$ alors la matrice A n'est pas inversible et le rang n'est pas maximal. Puisqu'il admet au moins la solution évidente $(\lambda_1, \lambda_2) = (0,0)$, il admet une infinité de solutions, donc au moins une (λ_1, λ_2) différente de la solution évidente $(0,0)$. On en déduit que $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont colinéaires.

□

Exemple. Soit $a \in \mathbb{R}$. Les vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u_1} = (a-1, a-3)$ et $\overrightarrow{u_2} = (a-3, a-4)$ sont colinéaires si et seulement si :

$$(a-1)(a-4) - (a-3)(a-3) = 0 \iff a - 5 = 0 \iff a = 5.$$

Remarquez que l'exercice de trouver les valeurs du paramètre a pour lesquelles $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires peut être compliqué pour un lycéen qui dispose seulement de la propriété 2.

Définition 4

Trois vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ du plan ou de l'espace sont dits ***coplanaires*** *lorsqu'il existe trois scalaires $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ non nuls simultanément tels que la combinaison linéaire $\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \lambda_3\overrightarrow{v_3}$ est égale au vecteur nul, c'est-à-dire :*

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \Big\{(0,0,0)\Big\}, \quad \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \lambda_3\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}.$$

Exemple. Les vecteurs du plan $\overrightarrow{u_1} = (1,2)$, $\overrightarrow{u_2} = (3,4)$ et $\overrightarrow{u_3} = (4,6)$ sont coplanaires car :

$$\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = (4,6) = \overrightarrow{u_3} \quad \text{donc} \quad 1\overrightarrow{u_1} + 1\overrightarrow{u_2} + (-1)\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{0}.$$

Les vecteurs de l'espace $\overrightarrow{w_1} = (1,2,0)$, $\overrightarrow{w_2} = (4,0,6)$ et $\overrightarrow{w_3} = (0,8,9)$ ne sont pas coplanaires. En effet, si on cherche $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tels que $\lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2} + \lambda_3\overrightarrow{w_3} = \overrightarrow{0}$, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + 4\lambda_2, 2\lambda_1 + 8\lambda_3, 6\lambda_2 + 9\lambda_3) = (0,0,0) &\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ &\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 & 0 \\ 0 & \boxed{-8} & 8 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ L_3 \leftarrow 4L_3 + 3L_2 \\ &\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 & 0 \\ 0 & \boxed{-8} & 8 \\ 0 & 0 & \boxed{60} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le rang est maximal, donc ce système linéaire admet une unique solution qui est égale à :

$$\begin{cases} 60\lambda_3 = 0 \quad \text{donc} \quad \lambda_3 = 0 \\ -8\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \quad \text{donc} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \quad \text{donc} \quad \lambda_1 = -4\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

En particulier, il n'existe pas de scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$ tels que $\lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2} + \lambda_3\overrightarrow{w_3} = \overrightarrow{0}$.

Remarque. Si l'un des trois vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ est nul, par exemple $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ sont coplanaires car on a bien $\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \lambda_3\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}$ en posant $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1,0,0) \neq (0,0,0)$. De même, si deux des trois vecteurs sont colinéaires, par exemple $\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$, alors $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ sont coplanaires car on a bien $\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \lambda_3\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}$ en posant $\lambda_3 = 0$.

Important. De manière analogue à la définition 3 de la colinéarité, il faut reconnaître que la condition $\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \lambda_3\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}$ de la définition 4 est un système linéaire de deux ou trois équations (deux pour des vecteurs du plan, et trois pour des vecteurs de l'espace) à trois inconnues (λ_1, λ_2 et λ_3). Puisque ce système linéaire est homogène, il admet comme solution évidente $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$. Par conséquent, toutes les équations auxiliaires sont compatibles et il n'y a que deux cas possibles :

- au moins une des trois inconnues est auxiliaire (lorsque le rang est strictement inférieur à 3), dans ce cas $\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \lambda_3\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}$ admet une infinité de solutions, en particulier il en existe au moins une $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ différente de la solution évidente $(0,0,0)$, donc les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ sont coplanaires ;
- toutes les inconnues sont principales (lorsque le rang est égal à 3), dans ce cas $\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{v_2}+\lambda_3\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}$ admet une unique solution qui est la solution évidente $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$, donc les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ ne sont pas coplanaires.

On en déduit le théorème suivant (analogue du théorème 1 pour la colinéarité).

Théorème 2

Trois vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ sont coplanaires si et seulement si le rang de $\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \lambda_3\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}$ est strictement plus petit que 3.

En particulier, dans le cas de trois vecteurs du plan, puisqu'on a un système linéaire de deux équations à trois inconnues, on obtient un rang inférieur ou égal à 2 (le nombre d'équations).

Corollaire 2

Trois vecteurs du plan sont toujours coplanaires.

Les définitions 3 et 4 se généralisent à un nombre quelconque de vecteurs. On ne parle alors plus de vecteurs colinéaires ou coplanaires, mais d'une famille de vecteurs liée. Dans ce chapitre, on se restreint à des familles de deux ou trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$, mais on peut déjà introduire le vocabulaire général.

Définition 5

Soient $p \in \{2,3\}$ et $n \in \{2,3\}$. Une famille $(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_p})$ de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est dite :

- ***liée** ou **linéairement dépendante** lorsque :*

$$\exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \setminus \big\{(0,\ldots,0)\big\}, \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{0}$$

  c'est-à-dire lorsque le système linéaire $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{0}$ est de rang strictement inférieur à p et admet donc une infinité de solutions ;

- ***libre** ou **linéairement indépendante** lorsque :*

$$\forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{0} \implies (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = (0,\ldots,0)$$

  c'est-à-dire lorsque le système linéaire $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{0}$ est de rang égal à p et admet donc une unique solution (qui est la solution évidente).

Nous généraliserons la définition 5 à toutes les valeurs de p et de n dans le chapitre sur les familles de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Dans le cas d'une famille liée, une solution non évidente de $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{0}$ est appelée une **relation de dépendance linéaire**.

Exemple. Les vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u_1} = (1,2,3)$, $\overrightarrow{u_2} = (4,5,6)$ et $\overrightarrow{u_3} = (7,8,9)$ vérifient la relation de dépendance linéaire suivante :

$$\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_3} = (8,10,12) = 2\overrightarrow{u_2} \quad \text{donc} \quad 1\overrightarrow{u_1} + (-2)\overrightarrow{u_2} + 1\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{0}.$$

On en déduit que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est liée, autrement dit que les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ sont coplanaires.

1.3 Bases et coordonnées

Définition 6

— *Une* ***base*** *de* $\mathbb{R}^2$ *est une famille de deux vecteurs du plan non colinéaires.*

— *Une* ***base*** *de* $\mathbb{R}^3$ *est une famille de trois vecteurs de l'espace non coplanaires.*

Autrement dit, pour $n \in \{2,3\}$, une base de $\mathbb{R}^n$ est une famille libre de n vecteurs. Nous généraliserons la définition 6 à toutes les valeurs de n dans le chapitre sur les familles de vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Exemple. Les vecteurs du plan $\overrightarrow{i} = (1,0)$ et $\overrightarrow{j} = (0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ car $1 \times 1 - 0 \times 0 = 1 \neq 0$ (d'après le corollaire 1). De même, les vecteurs de l'espace $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ et $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ (d'après le théorème 2) car :

$$\lambda_1 \overrightarrow{i} + \lambda_2 \overrightarrow{j} + \lambda_3 \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{I}_3} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } \operatorname{rang}(\mathrm{I}_3) = 3.$$

Définition 7

— *La base* $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ *de* $\mathbb{R}^2$, *où* $\overrightarrow{i} = (1,0)$ *et* $\overrightarrow{j} = (0,1)$, *est appelée la* ***base canonique*** *de* $\mathbb{R}^2$.

— *La base* $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ *de* $\mathbb{R}^3$, *où* $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ *et* $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$, *est appelée la* ***base canonique*** *de* $\mathbb{R}^3$.

Théorème 3

— *Soit* $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ *une base de* $\mathbb{R}^2$. *Alors pour tout vecteur* $\overrightarrow{v}$ *du plan, il existe un unique couple de scalaires* $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{v}$.

— *Soit* $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ *une base de* $\mathbb{R}^3$. *Alors pour tout vecteur* $\overrightarrow{v}$ *de l'espace, il existe un unique triplet de scalaires* $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{v}$.

Démonstration. Le système linéaire $x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{v}$ de deux équations à deux inconnues (x_1 et x_2) a le même rang que le système linéaire $\lambda_1\overrightarrow{e_1} + \lambda_2\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{0}$ (car le rang ne dépend pas des seconds membres d'après la méthode du pivot de Gauss). Or ce rang est égal à 2 d'après le théorème 1 car les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que le système linéaire $x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{v}$ admet une unique solution (x_1, x_2). On raisonne de même dans $\mathbb{R}^3$.

□

Définition 8

— *Soient $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ une base de $\mathbb{R}^2$ et $\overrightarrow{v}$ un vecteur du plan. Alors l'unique couple de scalaires $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{v}$ est appelé* ***les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{v}$ dans la base $\mathscr{B}$****. On les note :*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{v}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}).$$

— *Soient $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{v}$ un vecteur de l'espace. Alors l'unique triplet de scalaires $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{v}$ est appelé* ***les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{v}$ dans la base $\mathscr{B}$****. On les note :*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{v}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

Exemple. Les vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathrm{f}_1} = (1, 2)$ et $\overrightarrow{\mathrm{f}_2} = (3, 5)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ car $1 \times 5 - 2 \times 3 = -1 \neq 0$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} = (0, 4)$ dans cette base sont l'unique solution de :

$$x_1\overrightarrow{\mathrm{f}_1} + x_2\overrightarrow{\mathrm{f}_2} = \overrightarrow{u} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{=A^{-1}} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Donc les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $\left(\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}\right)$ sont égales à $\mathrm{mat}_{\left(\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}\right)}\left(\overrightarrow{u}\right) = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \end{pmatrix}$.

De même, on peut montrer que les vecteurs de l'espace $\overrightarrow{d_1} = (0, 1, 2)$, $\overrightarrow{d_2} = (1, 1, 2)$ et $\overrightarrow{d_3} = (2, 1, 3)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$, et que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{w} = (2, 3, 5)$ dans cette base sont égales à :

$$\mathrm{mat}_{\left(\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}, \overrightarrow{d_3}\right)}\left(\overrightarrow{w}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad 0\overrightarrow{d_1} + 4\overrightarrow{d_2} + (-1)\overrightarrow{d_3} = (2, 3, 5) = \overrightarrow{w}.$$

Remarque. Les coordonnées du vecteur nul dans n'importe quelle base sont toutes égales à 0 (car $(x_1, x_2) = (0, 0)$ est solution évidente de $x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{0}$, et de même dans $\mathbb{R}^3$).

Exercice 1. Soient $\overrightarrow{e_1} = (a-1, a-8, a-7)$, $\overrightarrow{e_2} = (a-2, a-9, a-6)$ et $\overrightarrow{e_3} = (a-3, a-4, a-5)$ où $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{v} = (1, 2, 3)$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ pour $a = 5$ et $a = 6$.

Attention. Il ne faut pas confondre les composantes d'un vecteur et ses coordonnées dans une base. Ses coordonnées dépendent de la base choisie et sont en général différentes de ses composantes.

Propriété 3

Les coordonnées d'un vecteur dans la base canonique sont égales à ses composantes.

Démonstration. Soit $\overrightarrow{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ un vecteur du plan. Les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont l'unique solution de :

$$x_1\overrightarrow{i} + x_2\overrightarrow{j} = \overrightarrow{v} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{I}_2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \mathrm{mat}_{\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)}\left(\overrightarrow{v}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

On raisonne de même dans $\mathbb{R}^3$ et on obtient le même résultat car la matrice des coefficients du système linéaire $x_1\overrightarrow{i} + x_2\overrightarrow{j} + x_3\overrightarrow{k} = \overrightarrow{v}$ est égale à la matrice identité I_3.

□

Conseil. Lorsqu'on peut choisir la base à utiliser, il est préférable de prendre la base canonique car les calculs des coordonnées sont simplifiés.

1.4 Produit scalaire et norme

Définition 9

— *Soient* $\overrightarrow{v_1} = (x_1, y_1)$ *et* $\overrightarrow{v_2} = (x_2, y_2)$ *deux vecteurs du plan. On définit leur* ***produit scalaire*** *par :*

$$\left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_2} \right\rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

On peut aussi le noter $\left\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \right\rangle$, $\left(\overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_2} \right)$ *ou simplement* $\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2}$ *s'il n'y a pas d'ambiguïtés.*

— *Soient* $\overrightarrow{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ *et* $\overrightarrow{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ *deux vecteurs de l'espace. On définit leur* ***produit scalaire*** *par :*

$$\left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_2} \right\rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Propriété 4

Soit $n \in \{2, 3\}$*. Le produit scalaire a les propriétés suivantes :*

- $\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n, \quad \left\langle \overrightarrow{v} \middle| \overrightarrow{0} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{0} \middle| \overrightarrow{v} \right\rangle = 0,$
- $\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n, \quad \left\langle \overrightarrow{v} \middle| \overrightarrow{v} \right\rangle \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \left\langle \overrightarrow{v} \middle| \overrightarrow{v} \right\rangle = 0 \iff \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0},$
- ***symétrie*** *:* $\forall \overrightarrow{v_1} \in \mathbb{R}^n,\ \forall \overrightarrow{v_2} \in \mathbb{R}^n, \quad \left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_2} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{v_2} \middle| \overrightarrow{v_1} \right\rangle,$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \overrightarrow{v_1} \in \mathbb{R}^n,\ \forall \overrightarrow{v_2} \in \mathbb{R}^n, \quad \left\langle \lambda \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_2} \right\rangle = \lambda \left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_2} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \lambda \overrightarrow{v_2} \right\rangle,$
- $\forall \overrightarrow{v_1} \in \mathbb{R}^n,\ \forall \overrightarrow{v_2} \in \mathbb{R}^n,\ \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n, \quad \left\langle \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} \middle| \overrightarrow{v} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{v_2} \middle| \overrightarrow{v} \right\rangle.$

Démonstration. Il suffit d'écrire les composantes de chaque vecteur et d'utiliser la définition du produit scalaire.

□

Remarque. En combinant les deux derniers points de la propriété 4, on a :

$$\left\langle \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} \middle| \overrightarrow{v} \right\rangle = \lambda_1 \left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v} \right\rangle + \lambda_2 \left\langle \overrightarrow{v_2} \middle| \overrightarrow{v} \right\rangle$$

et par symétrie :

$$\left\langle \overrightarrow{v} \middle| \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} \right\rangle = \lambda_1 \left\langle \overrightarrow{v} \middle| \overrightarrow{v_1} \right\rangle + \lambda_2 \left\langle \overrightarrow{v} \middle| \overrightarrow{v_2} \right\rangle.$$

Cette propriété s'appelle la **bilinéarité** du produit scalaire.

Définition 10

Deux vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ *et* $\overrightarrow{v_2}$ *du plan ou de l'espace sont dits* ***orthogonaux*** *lorsque leur produit scalaire est nul :*

$$\left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_2} \right\rangle = 0.$$

Exemple. Les vecteurs du plan $\overrightarrow{u_1} = (2, 3)$ et $\overrightarrow{u_2} = (3, -2)$ sont orthogonaux car $2 \times 3 + 3 \times (-2) = 0$. De même, les vecteurs de l'espace $\overrightarrow{w_1} = (1, 2, 3)$ et $\overrightarrow{w_2} = (5, 2, -3)$ sont orthogonaux.

Remarque. Le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur.

Propriété 5

Deux vecteurs non nuls orthogonaux ne sont jamais colinéaires.

Démonstration. Soient $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ deux vecteurs non nuls orthogonaux. Par l'absurde, on suppose que $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont colinéaires. Donc il existe deux scalaires $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ tels que $\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$. D'après les propriétés du produit scalaire, on a :

$$\left\langle \underbrace{\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{v_2}}_{=\overrightarrow{0}} \middle| \overrightarrow{v_1} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{0} \middle| \overrightarrow{v_1} \right\rangle = 0$$

$$\text{et} \quad \left\langle \lambda_1\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{v_2} \middle| \overrightarrow{v_1} \right\rangle = \lambda_1\left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_1} \right\rangle + \lambda_2 \underbrace{\left\langle \overrightarrow{v_2} \middle| \overrightarrow{v_1} \right\rangle}_{=\left\langle \overrightarrow{v_1} | \overrightarrow{v_2} \right\rangle = 0} = \lambda_1\left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_1} \right\rangle.$$

On en déduit par intégrité que $\lambda_1 = 0$ ou $\left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_1} \right\rangle = 0$. Or $\left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_1} \right\rangle = 0 \iff \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{0}$ ce qui est absurde car $\overrightarrow{v_1}$ est non nul. Par conséquent, $\lambda_1 = 0$. En raisonnant de même avec $\left\langle \lambda_1\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{v_2} \middle| \overrightarrow{v_2} \right\rangle$, on obtient que $\lambda_2 = 0$. Ce qui est absurde car $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$. On en déduit bien que $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ ne sont pas colinéaires.

□

Remarque. La réciproque de la propriété 5 est fausse en général (par exemple $\overrightarrow{u_1} = (1,0)$ et $\overrightarrow{u_2} = (1,1)$ ne sont pas colinéaires car $1\times 1 - 0\times 1 = 1 \neq 0$ mais ne sont pas orthogonaux car $1\times 1 + 0\times 1 = 1 \neq 0$). Par contre, on en déduit par contraposée que deux vecteurs non nuls colinéaires ne sont jamais orthogonaux.

Exercice 2. Démontrer que trois vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux ne sont jamais coplanaires.

Définition 11

*Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur du plan ou de l'espace. On définit sa **norme** par :*

$$\left\|\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{v} \middle| \overrightarrow{v} \right\rangle}.$$

- *En particulier, si $\overrightarrow{v} = (x,y)$ est un vecteur du plan alors :*

$$\left\|\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{x^2+y^2},$$

- *et si $\overrightarrow{v} = (x,y,z)$ est un vecteur de l'espace alors :*

$$\left\|\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Propriété 6

Soit $n \in \{2,3\}$. La norme a les propriétés suivantes :

- $\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n, \quad \left\|\overrightarrow{v}\right\| \geqslant 0 \quad$ *et* $\quad \left\|\overrightarrow{v}\right\| = 0 \iff \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n, \quad \left\|\lambda\overrightarrow{v}\right\| = |\lambda|\left\|\overrightarrow{v}\right\|$,
- $\forall \overrightarrow{v_1} \in \mathbb{R}^n,\ \forall \overrightarrow{v_2} \in \mathbb{R}^n, \quad \left\|\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{v_1}\right\|^2 + 2\left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_2} \right\rangle + \left\|\overrightarrow{v_2}\right\|^2$.

Démonstration. Par définition de la norme et propriétés du produit scalaire (cf. propriété 4). Par exemple pour le dernier point :

$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}\right\|^2 &= \left\langle \overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2} \middle| \overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2} \right\rangle \\
&= \left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{v_2} \middle| \overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2} \right\rangle \\
&= \underbrace{\left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_1} \right\rangle}_{=\|\overrightarrow{v_1}\|^2} + \left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_2} \right\rangle + \underbrace{\left\langle \overrightarrow{v_2} \middle| \overrightarrow{v_1} \right\rangle}_{=<\overrightarrow{v_1}|\overrightarrow{v_2}>} + \underbrace{\left\langle \overrightarrow{v_2} \middle| \overrightarrow{v_2} \right\rangle}_{=\|\overrightarrow{v_2}\|^2} \\
&= \left\|\overrightarrow{v_1}\right\|^2 + 2\left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_2} \right\rangle + \left\|\overrightarrow{v_2}\right\|^2.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 3 (***Théorème de Pythagore***)

Deux vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont orthogonaux si et seulement si $\left\|\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{v_1}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{v_2}\right\|^2$.

Démonstration. Il suffit de raisonner par double implication à l'aide du dernier point de la propriété 6.

□

Théorème 4 (***Inégalité de Cauchy-Schwarz***)

Soient $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ deux vecteurs. Alors :

$$\left|\left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_2} \right\rangle\right| \leqslant \left\|\overrightarrow{v_1}\right\| \left\|\overrightarrow{v_2}\right\|$$

avec égalité si et seulement si $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont colinéaires.

Démonstration. On considère la fonction suivante :

$$P : x \mapsto \underbrace{\left\|x\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}\right\|^2}_{\geqslant 0} = \underbrace{\left\|x\overrightarrow{v_1}\right\|}_{=|x|\|\overrightarrow{v_1}\|}^2 + 2\underbrace{\left\langle x\overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_2}\right\rangle}_{=x<\overrightarrow{v_1}|\overrightarrow{v_2}>} + \left\|\overrightarrow{v_2}\right\|^2 = \underbrace{\left\|\overrightarrow{v_1}\right\|^2}_{a} x^2 + \underbrace{2\left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_2}\right\rangle}_{b} x + \underbrace{\left\|\overrightarrow{v_2}\right\|^2}_{c}.$$

<u>1^er cas</u> : $\left\|\overrightarrow{v_1}\right\|^2 \neq 0$. Alors P est une fonction polynomiale de degré 2 qui est toujours positive. Le polynôme P ne peut pas avoir deux racines (sinon il serait négatif entre les racines, ce qui est absurde). On en déduit que son discriminant est nul ou strictement négatif. Or :

$$\Delta = \left(2\left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_2}\right\rangle\right)^2 - 4\left\|\overrightarrow{v_1}\right\|^2\left\|\overrightarrow{v_2}\right\|^2 = 4\left(\left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_2}\right\rangle^2 - \left\|\overrightarrow{v_1}\right\|^2\left\|\overrightarrow{v_2}\right\|^2\right) \leqslant 0 \quad \text{donc} \quad \left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_2}\right\rangle^2 \leqslant \left\|\overrightarrow{v_1}\right\|^2\left\|\overrightarrow{v_2}\right\|^2.$$

En passant à la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ qui est strictement croissante, on obtient bien l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_2}\right\rangle\right| \leqslant \left\|\overrightarrow{v_1}\right\|\left\|\overrightarrow{v_2}\right\| \quad \text{car} \quad \left\|\overrightarrow{v_1}\right\| \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \left\|\overrightarrow{v_2}\right\| \geqslant 0.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si $\Delta = 0$. Dans ce cas, il existe une racine $x_0 \in \mathbb{R}$ de P, c'est-à-dire $P(x_0) = \left\|x_0\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}\right\|^2 = 0$. On en déduit que $x_0\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$. On reconnaît bien une relation de dépendance linéaire car $(x_0, 1) \neq (0, 0)$, donc $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont colinéaires.

<u>2^e cas</u> : $\left\|\overrightarrow{v_1}\right\|^2 = 0$ donc $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{0}$. Dans ce cas, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est évidente car $\left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_2}\right\rangle = 0$ et $\left\|\overrightarrow{v_1}\right\| = 0$. Il y a même égalité. De plus, $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont bien colinéaires car $1\overrightarrow{v_1} + 0\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$.

□

Remarque. En plus d'être originale et très «jolie», cette démonstration a le mérite d'utiliser seulement les propriétés du produit scalaire et de la norme. On obtient donc le même résultat dans d'autres branches des mathématiques dont certains objets ont les mêmes propriétés. Par exemple, on retrouvera l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans les chapitres sur les statistiques et sur les variables aléatoires.

Définition 12

Une base de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ est dite ***orthonormée*** *lorsque ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux et de norme égale à 1.*

Propriété 7

Les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ sont orthonormées.

Démonstration. Les calculs (2 produits scalaires et 2 normes pour $\mathbb{R}^2$, $\binom{3}{2} = 6$ produits scalaires et 3 normes pour $\mathbb{R}^3$) sont évidents.

□

Exercice 3. On fixe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et on considère les vecteurs de l'espace suivant :

$$\overrightarrow{r_1} = \Big(\cos(\alpha), -\sin(\alpha)\cos(\beta), \sin(\alpha)\sin(\beta)\Big) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{r_2} = \Big(\sin(\alpha), \cos(\alpha)\cos(\beta), -\cos(\alpha)\sin(\beta)\Big).$$

1. Montrer que $\overrightarrow{r_1}$ et $\overrightarrow{r_2}$ sont orthogonaux et calculer leur norme.
2. Trouver tous les vecteurs de l'espace $\overrightarrow{r_3}$ tels que $(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{r_3})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

2 Géométrie analytique

Le but de cette section est de décrire certains objets géométriques (c'est-à-dire des sous-ensembles de points) et de les étudier à l'aide des vecteurs.

2.1 Plan affine et espace affine

Définition 13

*Un **plan affine** est un ensemble de **points** tel que tout couple de points (A, B) permet de définir un unique vecteur du plan euclidien noté $\overrightarrow{AB} \in \mathbb{R}^2$. Chaque vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut être représenté graphiquement dans le plan affine par une flèche ayant A pour point de départ et B pour point d'arrivée, et est caractérisé par :*

- *sa **direction** : la droite (AB),*
- *son **sens** : de A vers B,*
- *sa **norme** : la distance $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ entre A et B.*

Remarque. Il existe une définition plus précise (faisant intervenir une bijection pour traduire la correspondance entre points et vecteurs) mais elle n'est pas un objectif de ce cours.

Propriété 8

Pour tout triplet de points (A, B, C) d'un plan affine, on a :

- $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ *et* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \iff A = B$,
- ***relation de Chasles*** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$,
- *et en particulier :* $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ *(car* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$*).*

Définition 14

*Un **espace affine** est un ensemble de **points** tel que tout couple de points (A, B) permet de définir un unique vecteur $\overrightarrow{AB} \in \mathbb{R}^3$, représenté graphiquement par une flèche allant de A vers B et caractérisé par sa **direction**, son **sens** et sa **norme**. Les vecteurs de l'espace euclidien ainsi définis vérifient les mêmes propriétés que ceux d'un plan affine (cf. propriété 8).*

Important. Le principe de la géométrie analytique consiste donc à décrire et à étudier des parties d'un plan (ou d'un espace) affine à l'aide des vecteurs du plan (ou de l'espace) euclidien. On représente et on visualise les objets géométriques par des sous-ensembles de points concrets. Mais on effectue des calculs avec les vecteurs abstraits.

Définition 15

*Trois points A, B et C d'un plan affine ou d'un espace affine sont dits **alignés** lorsque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Un **triangle** est un triplet de points (A, B, C) non alignés, on le note ABC.*

Remarque. Par définition, les **sommets** A, B et C d'un triangle ABC sont distincts deux à deux.

2.2 Repères et coordonnées

Définition 16

- *Un plan affine est dit **muni d'un repère** lorsqu'on fixe un point O quelconque du plan affine, appelé l'**origine**, et une base quelconque $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ de $\mathbb{R}^2$. On note $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ le repère ainsi choisi.*
- *Un espace affine est dit **muni d'un repère** lorsqu'on fixe un point O quelconque de l'espace affine, appelé l'**origine**, et une base quelconque $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ de $\mathbb{R}^3$. On note $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ le repère ainsi choisi.*

Définition 17

— *Soit M point d'un plan affine muni d'un repère $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$. On définit* ***les coordonnées du point M dans le repère*** *$(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ comme étant égales aux coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$, c'est-à-dire l'unique couple de scalaires $(x_M, y_M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{OM} = x_M \overrightarrow{x} + y_M \overrightarrow{y}$. On les note $M(x_M, y_M)$.*

— *Soit M point d'un espace affine muni d'un repère $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$. On définit* ***les coordonnées du point M dans le repère*** *$(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ comme étant égales aux coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$, c'est-à-dire l'unique triplet de scalaires $(x_M, y_M, z_M) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{OM} = x_M \overrightarrow{x} + y_M \overrightarrow{y} + z_M \overrightarrow{z}$. On les note $M(x_M, y_M, z_M)$.*

Remarque. Les coordonnées de l'origine dans n'importe quelle base sont toutes égales à 0 (car $\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{0}$).

Exemple. Soit ABC un triangle d'un plan affine. Puisque A, B et C sont non alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et forment donc une base de $\mathbb{R}^2$. Les coordonnées des sommets de ABC dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ sont égales à $A(0,0)$ (car A est l'origine), $B(1,0)$ (car $\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$) et $C(0,1)$ (car $\overrightarrow{AC} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AC}$).

Propriété 9

— *Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points d'un plan affine muni d'un repère $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$. Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ sont égales à :*

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

— *Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points d'un espace affine muni d'un repère $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$. Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ sont égales à :*

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On a d'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -\left(x_A \overrightarrow{x} + y_A \overrightarrow{y}\right) + \left(x_B \overrightarrow{x} + y_B \overrightarrow{y}\right) = (x_B - x_A)\, \overrightarrow{x} + (y_B - y_A)\, \overrightarrow{y}.$$

On raisonne de même dans l'espace.

□

Propriété 10

— *Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points d'un plan affine muni d'un repère $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$. Alors les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ sont égales à $I(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})$.*

— *Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points d'un espace affine muni d'un repère $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$. Alors les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ sont égales à $I(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2})$.*

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OI} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI} \quad \text{d'après la relation de Chasles} \\
&= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{car } I \text{ est le milieu de } [AB] \\
&= \left(x_A \overrightarrow{x} + y_A \overrightarrow{y}\right) + \frac{1}{2}\Big((x_B - x_A)\overrightarrow{x} + (y_B - y_A)\overrightarrow{y}\Big) = \frac{x_A + x_B}{2}\overrightarrow{x} + \frac{y_A + y_B}{2}\overrightarrow{y}.
\end{aligned}$$

On raisonne de même dans l'espace.

□

2.3 Produit scalaire et projection orthogonale

Définition 18

Un repère (d'un plan ou d'un espace affine) est dit ***orthonormé*** *lorsque la base associée (du plan ou de l'espace euclidien) est orthonormée.*

Propriété 11

— *Soient $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ $C(x_C, y_C)$ et $D(x_D, y_D)$ quatre points d'un plan affine muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$. Alors le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est égal à :*

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = (x_B - x_A)(x_D - x_C) + (y_B - y_A)(y_D - y_C).$$

— *Soient $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ $C(x_C, y_C, z_C)$ et $D(x_D, y_D, z_D)$ quatre points d'un espace affine muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$. Alors le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est égal à :*

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = (x_B - x_A)(x_D - x_C) + (y_B - y_A)(y_D - y_C) + (z_B - z_A)(z_D - z_C).$$

Démonstration. On a d'après les propriétés du produit scalaire :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} =& \left\langle (x_B - x_A)\overrightarrow{x} + (y_B - y_A)\overrightarrow{y} \middle| (x_D - x_C)\overrightarrow{x} + (y_D - y_C)\overrightarrow{y} \right\rangle \\
=& (x_B - x_A)\left\langle \overrightarrow{x} \middle| (x_D - x_C)\overrightarrow{x} + (y_D - y_C)\overrightarrow{y} \right\rangle \\
&+ (y_B - y_A)\left\langle \overrightarrow{y} \middle| (x_D - x_C)\overrightarrow{x} + (y_D - y_C)\overrightarrow{y} \right\rangle \\
=& (x_B - x_A)(x_D - x_C)\underbrace{\left\langle \overrightarrow{x} \middle| \overrightarrow{x} \right\rangle}_{=\|\overrightarrow{x}\|^2=1} + (x_B - x_A)(y_D - y_C)\underbrace{\left\langle \overrightarrow{x} \middle| \overrightarrow{y} \right\rangle}_{=0} \\
&+ (y_B - y_A)(x_D - x_C)\underbrace{\left\langle \overrightarrow{y} \middle| \overrightarrow{x} \right\rangle}_{=0} + (y_B - y_A)(y_D - y_C)\underbrace{\left\langle \overrightarrow{y} \middle| \overrightarrow{y} \right\rangle}_{=\|\overrightarrow{y}\|^2=1} \\
=& (x_B - x_A)(x_D - x_C) + (y_B - y_A)(y_D - y_C) \quad \text{car la base } (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \text{ est orthonormée.}
\end{aligned}$$

On raisonne de même dans l'espace.

□

Attention. La propriété 11 est fausse si le repère n'est pas orthonormé ! Par exemple, on a vu que les coordonnées des sommets d'un triangle ABC d'un espace affine dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ sont égales à $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $C(0,1)$. Donc $(x_B - x_A)(x_C - x_A) + (y_B - y_A)(y_C - y_A) = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$ mais $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ n'est en général pas égal à 0. En effet, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux si le triangle n'est pas rectangle en A.

Conseil. Lorsqu'on peut choisir le repère à utiliser, il est préférable de prendre un repère orthonormé car on peut calculer des produits scalaires à l'aide de la propriété 11.

Corollaire 4

— *Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points d'un plan affine muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$. Alors la distance AB est égale à $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.*

— *Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points d'un espace affine muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$. Alors la distance AB est égale à $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.*

Attention. Comme la propriété 11, le corollaire 4 est faux si le repère n'est pas orthonormé ! Par exemple, on a avec les coordonnées des sommets d'un triangle ABC d'un espace affine dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$: $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ mais la longueur du côté AB n'est en général pas égale à 1.

Exercice 4. Soient $ABCD$ un parallélogramme d'un plan affine muni d'un repère orthonormé, c'est-à-dire un quadruplet de points (A, B, C, D) deux à deux distincts et tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Montrer que la somme des carrés des quatre côtés est égale à la somme des carrés des deux diagonales, c'est-à-dire :

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2.$$

Dans la section 1.4, nous avons vu la définition abstraite (dans le plan ou l'espace euclidien) du produit scalaire. Plus concrètement (dans un plan ou un espace affine), on retrouve les interprétations géométriques du collège et du lycée. Les résultats suivants (théorème 5 et corollaires 5, 6 et 7) sont des rappels (peut-être vus sous une autre forme).

Théorème 5

On note $\theta = \widehat{BAC} = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$ l'angle orienté formé par trois points A, B et C distincts deux à deux. Alors :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\theta).$$

Corollaire 5

Pour tout triplet de points (A, B, C) distincts deux à deux, on a :

- ***théorème de Pythagore*** *: ABC est rectangle en $A \iff BC^2 = AB^2 + AC^2$,*
- ***inégalité de Cauchy-Schwarz*** *: $\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right| \leqslant AB \times AC$ avec égalité $\iff$ A, B et C alignés.*

Corollaire 6

Soient A, B et C trois points distincts deux à deux. On note H le ***projeté orthogonal*** *de C sur la droite (AB), c'est-à-dire le point d'intersection entre (AB) et la droite perpendiculaire à (AB) passant par C. Alors :*

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH} = \begin{cases} AB \times AH \text{ si } H \text{ appartient à la demi-droite } [AB) \\ -AB \times AH \text{ sinon (c'est-à-dire si } A \text{ est entre } H \text{ et } B). \end{cases}$$

Corollaire 7

— *Soit $M(x_M, y_M)$ un point d'un plan affine muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$. Alors les coordonnées du point M dans le repère $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ sont égales à :*

$$\begin{cases} x_M = \overline{OH_x} & \text{où } H_x \text{ est le projeté orthogonal de } M \text{ sur l'axe } (O, \overrightarrow{x}), \\ y_M = \overline{OH_y} & \text{où } H_y \text{ est le projeté orthogonal de } M \text{ sur l'axe } (O, \overrightarrow{y}). \end{cases}$$

— *Soit $M(x_M, y_M, z_M)$ un point d'un espace affine muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$. Alors les coordonnées du point M dans le repère $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ sont égales à :*

$$\begin{cases} x_M = \overline{OH_x} & \text{où } H_x \text{ est le projeté orthogonal de } M \text{ sur l'axe } (O, \overrightarrow{x}), \\ y_M = \overline{OH_y} & \text{où } H_y \text{ est le projeté orthogonal de } M \text{ sur l'axe } (O, \overrightarrow{y}), \\ z_M = \overline{OH_z} & \text{où } H_z \text{ est le projeté orthogonal de } M \text{ sur l'axe } (O, \overrightarrow{z}). \end{cases}$$

Démonstration. On a d'après les propriétés du produit scalaire :

$$\overrightarrow{x}.\overrightarrow{OM} = \left\langle \overrightarrow{x} \middle| x_M \overrightarrow{x} + y_M \overrightarrow{y} \right\rangle = x_M \underbrace{\left\langle \overrightarrow{x} \middle| \overrightarrow{x} \right\rangle}_{= \|\overrightarrow{x}\|^2 = 1} + y_M \underbrace{\left\langle \overrightarrow{x} \middle| \overrightarrow{y} \right\rangle}_{=0} = x_M$$

$$\text{et} \quad \overrightarrow{x}.\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OX}.\overrightarrow{OM} = \underbrace{\overline{OX}}_{= \|\overrightarrow{x}\| = 1} \times \overline{OH_x} = \overline{OH_x} \quad \text{où } X(1,0) \text{ est le point tel que } \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{x}.$$

On en déduit que $x_M = \overline{OH_x}$. On raisonne de même pour les autres coordonnées du plan et de l'espace.

□

Remarque. Le corollaire 7 justifie les calculs utilisés en pratique depuis le collège pour déterminer les coordonnées dans les repères $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ (qui sont bien orthonormés car les bases canoniques sont orthonormées) en projetant orthogonalement un point sur les axes de coordonnées.

Attention. Comme la propriété 11 et le corollaire 4, le corollaire 7 est faux si le repère n'est pas orthonormé (voir par exemple les coordonnées des sommets d'un triangle ABC dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$).

2.4 Droites du plan

Dans cette section, on fixe un plan affine muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Définition 19

*Une **droite du plan** $\mathscr{D}$ est caractérisée par la donnée*

- *d'un point A du plan*
- *et d'un vecteur non nul $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$, appelé **vecteur directeur** de $\mathscr{D}$.*

La droite $\mathscr{D}$ passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.

Puisque le vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est non nul, on a :

$$M \in \mathscr{D} \iff \exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}.$$

On peut traduire cette relation à l'aide des coordonnées $A(x_A, y_A)$, $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j}$ et $M(x, y)$. On obtient :

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} \iff \begin{cases} x - x_A = t\alpha \\ y - y_A = t\beta \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases}.$$

Autrement dit :

$$\mathscr{D} = \left\{M(x_A + \alpha t, y_A + \beta t) \mid t \in \mathbb{R}\right\}.$$

On reconnaît une représentation d'ensemble par un paramètre.

Définition 20

*Une **représentation paramétrique** de la droite du plan $\mathscr{D}$ passant par un point $A(x_A, y_A)$ et dirigée par un vecteur $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} \neq \overrightarrow{0}$ est notée :*

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Remarque. Une droite admet une infinité de représentations paramétriques (autant que de choix d'un point appartenant à la droite et d'un vecteur directeur non nul).

Attention. Le paramètre $t \in \mathbb{R}$ est une variable muette. Les paramètres de deux représentations paramétriques (d'une même droite ou de deux droites différentes) sont différents.

Exemple. La droite passant par les points $A(1, 4)$ et $B(3, 9)$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j}$. On obtient deux représentations paramétriques selon qu'on utilise le point d'appartenance A ou B :

$$(AB) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (AB) : \begin{cases} x = 3 + 2s \\ y = 9 + 5s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

On retrouve que le point A appartient à (AB) en prenant comme valeur de paramètre $t = 0$ dans la première représentation et $s = -1$ dans la deuxième. De même, on retrouve que le point B appartient à (AB) en prenant comme valeur de paramètre $t = 1$ dans la première représentation et $s = 0$ dans la deuxième.

On peut également traduire la colinéarité entre $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ de la définition 19 à l'aide du déterminant :

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{D} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires}\\
&\iff (x - x_A)\beta - (y - y_A)\alpha = 0 \quad \text{car} \quad \begin{cases} \operatorname{mat}_{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})}\left(\overrightarrow{AM}\right) = \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \\ \operatorname{mat}_{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})}\left(\overrightarrow{u}\right) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{cases}\\
&\iff \beta x - \alpha y + (-x_A\beta + y_A\alpha) = 0\\
&\iff ax + by + c = 0 \quad \text{en posant } a = \beta,\ b = -\alpha \text{ et } c = -x_A\beta + y_A\alpha.
\end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\mathscr{D} = \Big\{M(x, y) \mid ax + by + c = 0\Big\}.$$

On reconnaît une représentation d'ensemble par une propriété. De plus, on remarque que a et b sont les coordonnées d'un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$ car $a \times \alpha + b \times \beta = \beta\alpha + (-\alpha)\beta = 0$.

Propriété 12

*Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$. L'ensemble $\mathscr{D}$ des points $M(x, y)$ du plan vérifiant une relation, appelée **équation cartésienne**, de la forme :*

$$\mathscr{D} : ax + by + c = 0$$

*est une droite du plan de **vecteur normal** $\overrightarrow{n} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} \neq \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire un vecteur orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathscr{D}$.*

Démonstration. Puisque $(a, b) \neq (0, 0)$, on a deux cas distincts : $a \neq 0$, ou $a = 0$ et $b \neq 0$.

1^er^ cas : $a \neq 0$. Alors l'équation cartésienne est un système linéaire d'une seule équation à deux inconnues, de rang égal à 1. Il admet donc une infinité de solutions de la forme :

$$(x, y) = \left(-\frac{c}{a} - \frac{b}{a}y, y\right) \quad \text{où } y \in \mathbb{R} \text{ est un paramètre quelconque}$$

ce qu'on peut aussi écrire :

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = -\frac{c}{a} - \frac{b}{a}t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

On reconnaît une représentation paramétrique de la droite passant par le point $A(\frac{-c}{a}, 0)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = \frac{-b}{a}\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \neq \overrightarrow{0}$. Le vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est bien orthogonal au vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ car :

$$\left\langle \overrightarrow{n} \middle| \overrightarrow{u} \right\rangle = a \times \frac{-b}{a} + b \times 1 = 0.$$

2^e^ cas : $a = 0$ et $b \neq 0$. Alors l'équation cartésienne est un système linéaire d'une seule équation à deux inconnues, de rang égal à 1. Il admet donc une infinité de solutions de la forme :

$$(x, y) = \left(x, -\frac{c}{b}\right) \quad \text{où } x \in \mathbb{R} \text{ est un paramètre quelconque}$$

ce qu'on peut aussi écrire :

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{-c}{b} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

On reconnaît une représentation paramétrique de la droite passant par le point $B(0, \frac{-c}{b})$ et dirigée par le vecteur $1\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j} = \overrightarrow{i} \neq \overrightarrow{0}$. Le vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est bien orthogonal au vecteur directeur $\overrightarrow{i}$ car :

$$\left\langle \overrightarrow{n} \middle| \overrightarrow{i} \right\rangle = a \times 1 + b \times 0 = a = 0 \quad \text{puisque } a = 0 \text{ dans le 2}^{\text{e}} \text{ cas.}$$

□

Remarque. Une droite admet une infinité d'équations cartésiennes (puisque la forme de l'équation ne change pas en la multipliant par une constante non nulle) mais elles sont toutes proportionnelles entre elles (puisque deux vecteurs normaux sont toujours colinéaires).

Exemple. On cherche la distance entre l'origine et la droite passant par les points $A(1,7)$ et $B(5,10)$. Cette distance est atteinte au projeté orthogonal H de O sur (AB), c'est-à-dire le point d'intersection entre (AB) et la droite Δ perpendiculaire à (AB) passant par O. Donc $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$ est un vecteur normal de Δ. On en déduit qu'une équation cartésienne de Δ est de la forme :

$$\Delta : 4x + 3y + c = 0 \quad \text{où } c \in \mathbb{R} \text{ est une constante à déterminer.}$$

Puisque $O \in \Delta$, on a $4 \times 0 + 4 \times 0 + c = 0$ donc $c = 0$. De plus, on remarque que $\overrightarrow{n} = 3\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}$ est un vecteur normal de (AB) car $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n} = 4 \times 3 + 3 \times (-4) = 0$, donc une équation cartésienne de (AB) est de la forme :

$$(AB) : 3x - 4y + d = 0 \quad \text{où } d \in \mathbb{R} \text{ est une constante à déterminer.}$$

Puisque $A \in (AB)$, on a $3 \times 1 - 4 \times 7 + d = 0$ donc $d = 25$. Ainsi, les coordonnées de H sont solutions du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 3x - 4y + 25 = 0 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -25 \end{pmatrix}.$$

Or $\det(A) = -25 \neq 0$ donc la matrice A est inversible et ce système linéaire admet une unique solution qui est égale à :

$$\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -25 \end{pmatrix} = \frac{1}{-25} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Finalement, la distance entre O et (AB) est égale à :

$$OH = \left\| \overrightarrow{OH} \right\| = \sqrt{(-3-0)^2 + (4-0)^2} = 5.$$

Conseil. En géométrie analytique, après avoir traduit un énoncé en équations (à l'aide des coordonnées et du calcul vectoriel), on se ramène à des exercices de systèmes linéaires et de matrices. Mais l'interprétation géométrique permet de vérifier la cohérence de ses résultats. Ainsi, dans l'exemple précédent, il aurait été incohérent d'obtenir une matrice A non inversible. En effet, puisque (AB) intersecte sa perpendiculaire Δ, le système obtenu doit avoir une unique solution.

Exercice 5. On considère les points $A(3,7)$, $B(-5,3)$ et $C(-2,-8)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice au segment $[AB]$, c'est-à-dire la droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu de $[AB]$.
2. Déterminer des équations cartésiennes des médiatrices de $[AC]$ et $[BC]$.
3. En échelonnant le système linéaire formé par les trois équations cartésiennes obtenues précédemment, justifier que les trois médiatrices du triangle ABC sont concourantes.
4. Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit à ABC, c'est-à-dire du point de concourance des trois médiatrices.

Exercice 6. On considère les mêmes points que l'exercice précédent. En vous inspirant de la méthode utilisée, justifier que les trois hauteurs de ABC (c'est-à-dire les droites passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé) sont concourantes, puis déterminer les coordonnées du point de concourance, appelé l'orthocentre de ABC.

Exercice 7. Soient $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$ trois points non alignés. Justifier que les trois médianes du triangle ABC (c'est-à-dire les droites passant par un sommet et le milieu du côté opposé) sont concourantes, puis déterminer les coordonnées du point de concourance, appelé le centre de gravité de ABC, en fonction des coordonnées de A, B et C.

2.5 Cercles du plan

Dans cette section, on fixe un plan affine muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Définition 21

*Un **cercle** $\mathscr{C}$ est caractérisé par la donnée :*

- *d'un point C du plan, appelé **centre** de $\mathscr{C}$,*
- *et d'un réel $r > 0$, appelé **rayon** de $\mathscr{C}$.*

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre C et de rayon r est l'ensemble des points M du plan tels que la distance CM est égale à r.

À l'aide des coordonnées $C(x_C, y_C)$ et $M(x, y)$, on obtient :

$$CM = r \iff \left\|\overrightarrow{CM}\right\|^2 = r^2 \iff (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2.$$

Autrement dit :

$$\mathscr{C} = \left\{M(x, y) \mid (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2\right\}.$$

On reconnaît une représentation d'ensemble par une propriété.

Définition 22

Une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de centre $C(x_C, y_C)$ et de rayon $r > 0$ est notée :

$$\mathscr{C} : (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2.$$

En développant cette équation cartésienne, on obtient :

$$\begin{aligned}(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 &\iff x^2 + y^2 - 2x_C x - 2y_C y + \left(x_C^2 + y_C^2 - r^2\right) = 0\\ &\iff x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\end{aligned}$$

en posant $a = -2x_C$, $b = -2y_C$ et $c = x_C^2 + y_C^2 - r^2$.

Propriété 13

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. L'ensemble des points $M(x, y)$ du plan vérifiant une équation cartésienne de la forme :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

est : un ensemble vide ou un singleton (c'est-à-dire un ensemble contenant un seul point) ou un cercle.

Démonstration. On écrit l'équation cartésienne sous forme canonique :

$$\begin{aligned}&x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\\ \iff &x^2 + 2x\frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + 2y\frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0\\ \iff &\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c.\end{aligned}$$

On obtient une somme de deux carrés, donc positive, égale à $d = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$. On raisonne par disjonction de cas.

1er cas : $d < 0$. Alors l'équation cartésienne n'admet pas de solutions, donc l'ensemble est vide.

2e cas : $d = 0$. Alors $x + \frac{a}{2} = 0$ et $y + \frac{b}{2} = 0$. On en déduit que l'équation cartésienne admet une unique solution $(x, y) = (\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2})$, donc l'ensemble est un singleton contenant le point de coordonnées $(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2})$.

3e cas : $d > 0$. Alors l'équation cartésienne peut s'écrire sous la forme :

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

en posant $x_C = \frac{-a}{2}$, $y_C = \frac{-b}{2}$ et $r = \sqrt{d} > 0$. On reconnaît une équation cartésienne du cercle de centre $C(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2})$ et de rayon $r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$.

$\square$

Exercice 8. On considère les points $A(3,-2)$, $B(-5,4)$ et $C(3,4)$. Déterminer une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC, c'est-à-dire du cercle passant par les trois sommets de ABC.

Exercice 9. Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points distincts. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \lambda$ en fonction des valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ et des coordonnées de A et B.

Remarque. On peut également déterminer une représentation paramétrique du cercle $\mathscr{C}$ de centre $C(x_C, y_C)$ et de rayon $r > 0$ en s'inspirant de celle du cercle unité (pour rappel, le cercle unité est l'ensemble $\{M \mid OM = 1\} = \{M(\cos(\theta), \sin(\theta)) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$). On obtient :

$$\mathscr{C} : \begin{cases} x = x_C + r\cos(\theta) \\ y = y_C + r\sin(\theta) \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}.$$

Mais les représentations paramétriques de cercles sont peu utilisées en pratique.

2.6 Plans de l'espace

Dans cette section, on fixe un espace affine muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

Définition 23

*Un **plan de l'espace** $\mathscr{P}$ est caractérisé par la donnée*

- *d'un point A de l'espace*
- *et de deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{u}' \in \mathbb{R}^3$, appelés **vecteurs directeurs** de $\mathscr{P}$.*

Le plan $\mathscr{P}$ passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont coplanaires.

Par une étude analogue à celle de la section 2.4, les représentations paramétriques d'un plan de l'espace ont une forme similaire à celles d'une droite du plan, sauf qu'elles présentent deux paramètres au lieu d'un seul puisqu'un plan nécessite deux vecteurs directeurs (non colinéaires).

Définition 24

Une représentation paramétrique du plan de l'espace $\mathscr{P}$ passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{u}' = \alpha'\overrightarrow{i} + \beta'\overrightarrow{j} + \gamma'\overrightarrow{k}$ est notée :

$$\mathscr{P} : \begin{cases} x = x_A + \alpha t + \alpha' t' \\ y = y_A + \beta t + \beta' t' \\ z = z_A + \gamma t + \gamma' t' \end{cases}, (t, t') \in \mathbb{R}^2.$$

Remarque. Un plan admet une infinité de représentations paramétriques (autant que de choix d'un point appartenant au plan et de deux vecteurs directeurs non colinéaires).

Attention. Les paramètres $(t, t') \in \mathbb{R}^2$ sont des variables muettes.

Exemple. Le plan passant par les points $A(1,2,-3)$, $B(4,-5,6)$ et $C(-7,8,9)$ est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{i} - 7\overrightarrow{j} + 9\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{AC} = -8\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j} + 12\overrightarrow{k}$. Ces deux vecteurs sont bien non colinéaires car :

$$\begin{aligned} \lambda_1\overrightarrow{AB} + \lambda_2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0} &\iff \begin{pmatrix} \boxed{3} & -8 \\ -7 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow 3L_2 + 7L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} \boxed{3} & -8 \\ 0 & \boxed{-38} \\ 0 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; L_3 \leftarrow 38L_3 + 36L_2 \\ &\iff \begin{pmatrix} \boxed{3} & -8 \\ 0 & \boxed{-38} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Puisque le plan passe par $A(1,2,-3)$, on obtient la représentation paramétrique suivante :

$$(ABC) : \begin{cases} x = 1 + 3t - 8t' \\ y = 2 - 7t + 6t' \\ z = -3 + 9t + 12t' \end{cases}, (t,t') \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 10. On considère les points $A(-1,4,1)$ et $B(3,0,5)$. Déterminer une représentation paramétrique du plan Π perpendiculaire à la droite (AB) et passant par le milieu du segment $[AB]$.

Toujours pas analogie avec la section 2.4 sur les droites du plan, on obtient une propriété similaire à la propriété 12.

Propriété 14

Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. L'ensemble $\mathscr{P}$ des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant une équation cartésienne de la forme :

$$\mathscr{P} : ax + by + cz + d = 0$$

est un plan de l'espace de vecteur normal $\overrightarrow{n} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire un vecteur orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathscr{P}$.

Démonstration. Puisque $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, on a trois cas distincts : $a \neq 0$, ou $a = 0$ et $b \neq 0$, ou $a = b = 0$ et $c \neq 0$.

<u>1er cas</u> : $a \neq 0$. Alors l'équation cartésienne est un système linéaire d'une seule équation à trois inconnues, de rang égal à 1. Il admet donc une infinité de solutions de la forme :

$$(x,y,z) = \left(-\frac{d}{a} - \frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z, y, z\right) \quad \text{où } (y,z) \in \mathbb{R}^2 \text{ sont des paramètres quelconques}$$

ce qu'on peut aussi écrire :

$$\mathscr{P} : \begin{cases} x = -\frac{d}{a} - \frac{b}{a}t - \frac{c}{a}t' \\ y = t \\ z = t' \end{cases}, (t,t') \in \mathbb{R}^2.$$

On reconnaît une représentation paramétrique du plan passant par le point $A(\frac{-d}{a},0,0)$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u} = \frac{-b}{a}\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{u}' = \frac{-c}{a}\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$. Ces deux vecteurs sont bien non colinéaires car :

$$\text{rang}\begin{pmatrix} \frac{-b}{a} & \frac{-c}{a} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-b}{a} & \frac{-c}{a} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{b}{a}L_1 + \frac{c}{a}L_2 \end{matrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

De plus, le vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est bien orthogonal aux vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ car :

$$\left\langle \overrightarrow{n} \middle| \overrightarrow{u} \right\rangle = a \times \frac{-b}{a} + b \times 1 + c \times 0 = 0 \quad \text{et} \quad \left\langle \overrightarrow{n} \middle| \overrightarrow{u}' \right\rangle = a \times \frac{-c}{a} + b \times 0 + c \times 1 = 0.$$

On raisonne de même dans les 2e et 3e cas.

□

Remarque. Les points $M(x,y,z)$ du plan $\mathscr{P}$ passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{0}$ vérifient :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{P} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{n} \text{ sont orthogonaux} \\ &\iff \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \overrightarrow{n} \right\rangle = 0 \\ &\iff (x - x_A)a + (y - y_A)b + (z - z_A)c = 0 \\ &\iff ax + by + cz + (-x_A a - y_A b - z_A c) = 0 \\ &\iff ax + by + cz + d = 0 \quad \text{en posant } d = -x_A a - y_A b - z_A c. \end{aligned}$$

On retrouve bien la forme d'une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.

Important. Dans un plan affine, un point et un vecteur normal (non nul) caractérisent une droite. Alors que dans un espace affine, ils caractérisent un plan. Par contre, il faut un seul vecteur directeur (non nul) pour une droite et deux vecteurs directeurs (non colinéaires) pour un plan.

Remarque. Un plan admet une infinité d'équations cartésiennes (puisque la forme de l'équation ne change pas en la multipliant par une constante non nulle) mais elles sont toutes proportionnelles entre elles (puisque deux vecteurs normaux sont toujours colinéaires).

Exercice 11. Déterminer des équations cartésiennes du plan Π de l'exercice 10 et du plan (ABC) de l'exemple précédent l'exercice 10 (page 19).

Exercice 12. Déterminer la distance entre le point $M(3,-4,5)$ et le plan passant par les points $A(1,1,0)$, $B(-2,3,2)$ et $C(-2,1,1)$, c'est-à-dire la distance entre M et le projeté orthogonal H de M sur (ABC).

Exercice 13. On considère les points $A(0,2,1)$, $B(1,-2,0)$, $C(1,2,2)$, $A'(-1,-1,3)$, $B'(-2,1,3)$ et $C'(-3,1,2)$. Montrer que les plans (ABC) et $(A'B'C')$ sont parallèles puis calculer la distance les séparant.

2.7 Droites de l'espace

Dans cette section, on fixe un espace affine muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

Définition 25

Une ***droite de l'espace*** $\mathscr{D}$ *est caractérisée par la donnée*

- *d'un point A de l'espace*
- *et d'un vecteur* <u>*non nul*</u> $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$, *appelé* ***vecteur directeur*** *de* $\mathscr{D}$.

La droite $\mathscr{D}$ passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.

Par une étude analogue à celle de la section 2.4, les représentations paramétriques d'une droite de l'espace ont une forme similaire à celles d'une droite du plan, sauf qu'elles présentent une troisième coordonnée.

Définition 26

Une ***représentation paramétrique*** *de la droite de l'espace $\mathscr{D}$ passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigée par un vecteur $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{0}$ est notée :*

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Remarque. Une droite admet une infinité de représentations paramétriques (autant que de choix d'un point appartenant à la droite et d'un vecteur directeur non nul).

Attention. Le paramètre t est une variable muette.

Exercice 14. On considère les points $A(1,2,-3)$, $B(4,-5,6)$, $A'(9,8,-7)$ et $B'(6,-5,4)$. Montrer que les droites (AB) et $(A'B')$ sont ni parallèles, ni sécantes.

Propriété 15

Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ et $(a',b',c',d') \in \mathbb{R}^4$ tels que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ et $(a',b',c') \neq (0,0,0)$. L'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant des équations cartésiennes de la forme :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

est : un ensemble vide ou un plan ou une droite.

Démonstration. On reconnaît les équations cartésiennes de deux plans de l'espace : un plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{n} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{0}$ et un plan $\mathscr{P}'$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}' = a'\overrightarrow{i} + b'\overrightarrow{j} + c'\overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{0}$. L'ensemble est donc l'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.
<u>1er cas</u> : $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont colinéaires, donc il existe deux scalaires $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$ tels que $\lambda_1\overrightarrow{n} + \lambda_2\overrightarrow{n}' = \overrightarrow{0}$. À l'aide des coordonnées, on en déduit que $\lambda_1 a + \lambda_2 a' = \lambda_1 b + \lambda_2 b' = \lambda_1 c + \lambda_2 c' = 0$. Par conséquent, en appliquant l'opération $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$ dans le système d'équations cartésiennes, on obtient l'équation :

$$\lambda_1 d + \lambda_2 d' = 0.$$

On reconnaît une équation auxiliaire.
<u>1er sous-cas</u> : $\lambda_1 d + \lambda_2 d' \neq 0$. Alors l'équation auxiliaire n'est pas compatible, donc le système d'équations cartésiennes n'a pas de solutions. On en déduit que $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \emptyset$.
<u>2e sous-cas</u> : $\lambda_1 d + \lambda_2 d' = 0$. Alors l'équation auxiliaire est compatible. On en déduit que les deux équations cartésiennes sont proportionnelles, donc que $\mathscr{P} = \mathscr{P}'$ et par conséquent $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \mathscr{P} = \mathscr{P}'$.
<u>2e cas</u> : $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ ne sont pas colinéaires. Alors on obtient deux équations principales en échelonnant le système d'équations cartésiennes. Plus précisément, on obtient un système linéaire de deux équations à trois inconnues, de rang égal à 2. Le système d'équations cartésiennes admet donc une infinité de solutions qu'on peut écrire en fonction d'un seul paramètre : l'inconnue auxiliaire. On reconnaît alors une représentation paramétrique d'une droite de l'espace. Par conséquent, $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$ est une droite.

□

Corollaire 8

Les équations cartésiennes d'une droite de l'espace $\mathscr{D}$ sont de la forme :

$$\mathscr{D} : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

où $\overrightarrow{n} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{n}' = a'\overrightarrow{i} + b'\overrightarrow{j} + c'\overrightarrow{k}$ sont deux vecteurs normaux <u>non colinéaires</u> de $\mathscr{D}$, c'est-à-dire des vecteurs orthogonaux à tout vecteur directeur de $\mathscr{D}$, et $(d, d') \in \mathbb{R}^2$ sont deux constantes qui peuvent être déterminées à l'aide d'un point appartenant à $\mathscr{D}$.

Attention. Si les deux vecteurs normaux sont colinéaires, les deux équations cartésiennes ne caractérisent plus une droite (on reconnaît le 1er cas de la démonstration de la propriété 15). Plus précisément, si les deux vecteurs normaux sont colinéaires, on reconnaît l'intersection de deux plans parallèles qui peut être un ensemble vide (1er sous-cas lorsque les plans ne sont pas confondus) ou un plan (2e sous-cas lorsque les plans sont confondus).

Important. Dans un plan affine, une équation cartésienne linéaire caractérise une droite. Alors que dans un espace affine, elle caractérise un plan. Il faut deux équations cartésiennes linéaires (associées à deux vecteurs normaux non colinéaires) pour caractériser une droite de l'espace (qui est vue comme l'intersection de deux plans non parallèles).

Exercice 15. Déterminer des équations cartésiennes des droites (AB) et $(A'B')$ de l'exercice 14.

Exercice 16. On considère les points $A(5,7,1)$, $B(-7,-12,3)$, $C(-2,5,-16)$, $D(6,0,3)$ et $E(-6,-14,-10)$. À l'aide d'équations cartésiennes, déterminer l'intersection du plan (ABC) et de la droite (DE).