Un problème de théorie des graphes

Le découpage d'une pastèque

Une classe décide de se partager une pastèque en la découpant de part en part à l'aide d'un grand couteau. Les étudiants souhaitent déterminer le nombre minimal de coups de couteau à réaliser pour que chacun d'entre eux reçoive au moins un morceau de pastèque (pas nécessairement de même taille).

On modélise la pastèque par une sphère, et chaque coup de couteau par un cercle sur sa surface. Après n coups de couteau, les cercles forment un graphe sur la sphère constitué d'un nombre s_n de sommets (à l'intersection des cercles), d'un nombre a_n d'arêtes (les arcs de cercles joignant deux sommets) et d'un nombre f_n de faces (égal au nombre de morceaux de pastèque). Ainsi $f_1 = 2$.

Pour les trois premières parties, il est demandé d'illustrer les raisonnements et les réponses par des figures.

Partie I - Questions préliminaires

1. Déterminer f_2 dans le cas où les cercles formés par les deux coups de couteau sont disjoints.
2. Déterminer s_2, a_2 et f_2 dans le cas où les cercles formés par les deux coup de couteau s'intersectent.

Dans toute la suite de ce DM, afin de minimiser le nombre de coups de couteau, on considère seulement le cas où chaque paire de cercles s'intersecte (on pourra par exemple supposé que chaque coup de couteau passe par le centre de la sphère et donc que chaque cercle est de rayon maximal).

3. Déterminer s_3, a_3 et f_3 dans le cas où le troisième coup de couteau passe par les intersections des cercles formés par les deux premiers coup de couteau.
4. Déterminer s_3, a_3 et f_3 dans le cas où le troisième coup de couteau ne passe par aucune intersection des cercles formés par les deux premiers coup de couteau.

Dans toute la suite de ce DM, afin de minimiser le nombre de coups de couteau, on considère seulement le cas où chaque cercle ne passe par aucune intersection de deux autres cercles.

5. Déterminer s_4, a_4 et f_4.

Partie II - Théorème de Descartes-Euler

Le but de cette partie est de démontrer un théorème général de théorie des graphes : tout graphe sur une sphère vérifie la relation $\boxed{s - a + f = 2}$ où s est le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces.

Pour cela, on fixe un graphe quelconque sur une sphère, puis on lui retire une face en la découpant. On déforme ensuite la sphère sans la déchirer en étirant le trou ainsi formé, afin de l'aplatir et la déposer sur un plan. On obtient alors un graphe dans le plan ayant $s' = s$ sommets, $a' = a$ arêtes et $f' = f - 1$ faces. Enfin, on modifie ce graphe planaire à l'aide d'opérations décrites dans les questions suivantes.

6. Pour chaque face ayant plus de trois côtés, on ajoute une arête reliant deux sommets qui ne sont pas déjà reliés par une arête. Que devient la quantité $s' - a' + f'$? On répète cette opération jusqu'à ce que toutes les faces aient exactement trois côtés.
7. Pour chaque face ayant un seul côté à la frontière du graphe (c'est-à-dire une arête ne séparant pas deux faces), on supprime l'arête formant ce côté. Que devient la quantité $s' - a' + f'$?
8. Pour chaque face ayant deux côtés à la frontière du graphe, on supprime les deux arêtes formant ces côtés ainsi que leur sommet commun. Que devient la quantité $s' - a' + f'$?
9. On répète les deux opérations précédentes jusqu'à n'avoir plus qu'une seule face. Conclure.

10. Application : est-il possible de concevoir un ballon de football en cousant des pièces de cuir qui sont toutes hexagonales ? Indication : raisonner par l'absurde en exprimant s, a et f en fonction de nombre N de pièces de cuir.

Partie III - Résolution du problème

On fixe un nombre $k \geqslant 1$ de coups de couteau et on réalise un coup de couteau supplémentaire.

11. Dénombrer les points d'intersection entre le cercle formé par le nouveau coup de couteau et les k cercles précédents. En déduire $s_{k+1} - s_k$ en fonction de k.
12. Combien d'arêtes se rejoignent en chaque sommet ? En déduire une relation entre a_k et s_k, puis $a_{k+1} - a_k$ en fonction de k.
13. À l'aide du théorème de Descartes-Euler, exprimer $f_{k+1} - f_k$ en fonction de k.
14. En calculant $\sum_{k=1}^{n-1}(f_{k+1} - f_k)$ de deux manières différentes, déterminer f_n en fonction de n.
15. Résoudre le problème pour une classe de 42 étudiants.

Partie IV - Aux frontières du réel

Dans un univers parallèle à quatre dimensions, une classe d'hyper-étudiants considère le même problème. Chaque coup de leur hyper-couteau forme à la «surface» de leur hyper-pastèque une sphère tridimensionnelle (au lieu de la vulgaire découpe circulaire bidimensionnelle de notre univers à trois dimensions). Après n coups d'hyper-couteau, les sphères délimitent un nombre h_n de solides (des «hyper-faces») égal au nombre de morceaux quadridimensionnels de l'hyper-pastèque.

Afin de minimiser le nombre de coups d'hyper-couteau, on suppose que chaque paire de sphères s'intersecte (donc selon un cercle), et que chaque sphère ne passe par aucun cercle d'intersection de deux autres sphères.

16. Déterminer h_1, h_2, h_3, et h_4.
17. Justifier que $h_{k+1} - h_k = k^2 - k + 2$ pour tout $k \geqslant 1$.
18. En déduire h_n en fonction de n.
19. Résoudre le problème pour une classe de 42 hyper-étudiants.
20. Qu'en-est-il pour une classe de 42 infra-étudiants vivant dans un autre univers parallèle à seulement deux dimensions ?