Corrigé du découpage d'une pastèque

Une classe décide de se partager une pastèque en la découpant de part en part à l'aide d'un grand couteau. Les étudiants souhaitent déterminer le nombre minimal de coups de couteau à réaliser pour que chacun d'entre eux reçoive au moins un morceau de pastèque (pas nécessairement de même taille).

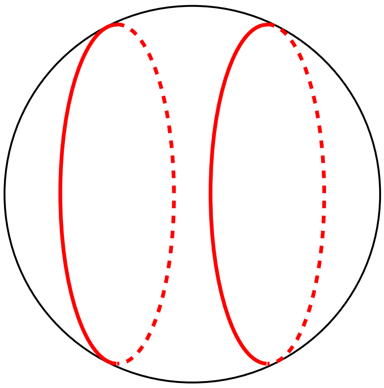
On modélise la pastèque par une sphère, et chaque coup de couteau par un cercle sur sa surface. Après n coups de couteau, les cercles forment un graphe sur la sphère constitué d'un nombre s_n de sommets (à l'intersection des cercles), d'un nombre a_n d'arêtes (les arcs de cercles joignant deux sommets) et d'un nombre f_n de faces (égal au nombre de morceaux de pastèque). Ainsi $f_1 = 2$.

Pour les trois premières parties du problème, il est demandé d'illustrer les raisonnements et les réponses par des figures.

Partie I - Questions préliminaires

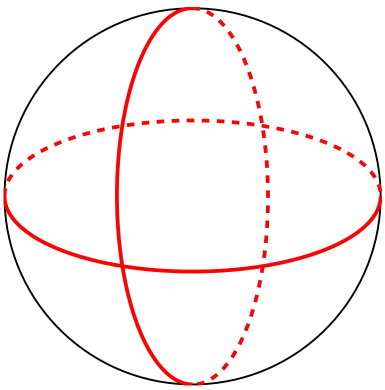
1. *Déterminer f_2 dans le cas où les cercles formés par les deux coups de couteau sont disjoints.*

   ► Si les deux cercles formés par les deux coups de couteau sont disjoints alors la pastèque est découpée en trois morceaux. Donc $\boxed{f_2 = 3}$.



2. *Déterminer s_2, a_2 et f_2 dans le cas où les cercles formés par les deux coup de couteau s'intersectent.*

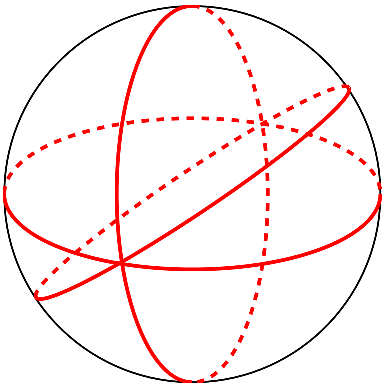
   ► Dans ce cas, on a $\boxed{s_2 = 2}$, $\boxed{a_2 = 4}$ et $\boxed{f_2 = 4}$.



Dans toute la suite de ce problème, afin de minimiser le nombre de coups de couteau, on considère seulement le cas où chaque paire de cercles s'intersecte (on pourra par exemple supposé que chaque coup de couteau passe par le centre de la sphère et donc que chaque cercle est de rayon maximal).

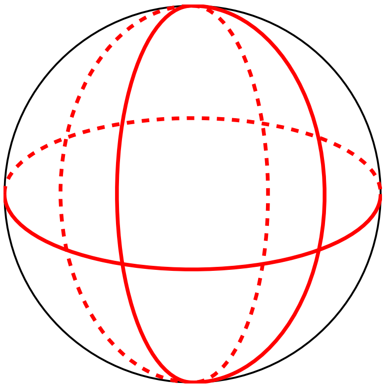
3. *Déterminer s_3, a_3 et f_3 dans le cas où le troisième coup de couteau passe par les intersections des cercles formés par les deux premiers coup de couteau.*

▶ Dans ce cas, on a $\boxed{s_3 = 2}$, $\boxed{a_3 = 6}$ et $\boxed{f_3 = 6}$.

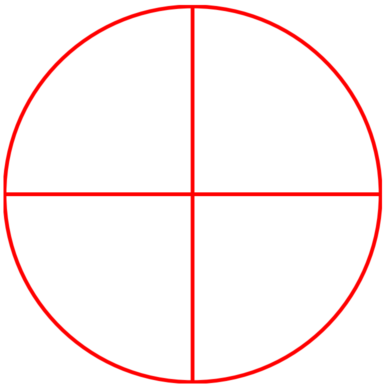


4. *Déterminer s_3, a_3 et f_3 dans le cas où le troisième coup de couteau ne passe par aucune intersection des cercles formés par les deux premiers coup de couteau.*

▶ Dans ce cas, on a $\boxed{s_3 = 6}$, $\boxed{a_3 = 12}$ et $\boxed{f_3 = 8}$.



On peut aussi représenter seulement l'hémisphère nord (en fixant pour équateur un cercle formé par un coup de couteau) vue de dessus :



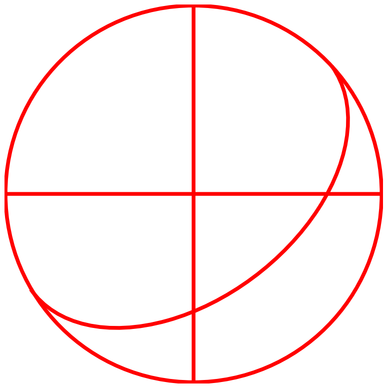
On obtient 5 sommets, 8 arêtes et 4 faces. Par symétrie, on obtient les mêmes nombres dans l'hémisphère sud. Or les 4 sommets et les 4 arêtes situés sur l'équateur sont comptés deux fois. On retrouve bien que :

$$s_3 = 5 + 5 - 4 = 6, \quad a_3 = 8 + 8 - 4 = 12 \quad \text{et} \quad f_3 = 4 + 4 = 8.$$

Dans toute la suite de ce problème, afin de minimiser le nombre de coups de couteau, on considère seulement le cas où chaque cercle ne passe par aucune intersection de deux autres cercles.

5. *Déterminer s_4, a_4 et f_4.*

▶ De même qu'à la question précédente, on peut représenter l'hémisphère nord (en fixant pour équateur un cercle formé par un coup de couteau), vue de dessus :



On obtient 9 sommets, 15 arêtes et 7 faces. Par symétrie, on obtient les mêmes nombres dans l'hémisphère sud. Or les 6 sommets et les 6 arêtes situés sur l'équateur sont comptés deux fois. On en déduit que :

$$s_4 = 9 + 9 - 6 = 12, \quad a_3 = 15 + 15 - 6 = 24 \quad \text{et} \quad f_3 = 7 + 7 = 14.$$

Ainsi $\boxed{s_4 = 12}$, $\boxed{a_4 = 24}$ et $\boxed{f_4 = 14}$.

Partie II - Théorème de Descartes-Euler

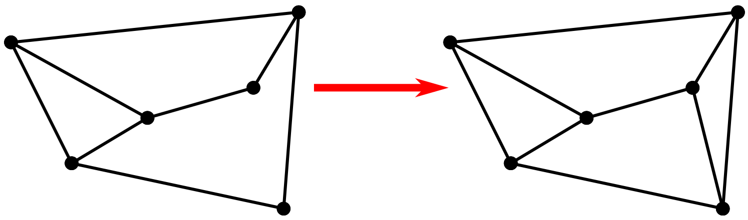
Le but de cette partie est de démontrer un théorème général de théorie des graphes : tout graphe sur une sphère vérifie la relation $\boxed{s - a + f = 2}$ *où s est le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces.*

Pour cela, on fixe un graphe quelconque sur une sphère, puis on lui retire une face en la découpant. On déforme ensuite la sphère sans la déchirer en étirant le trou ainsi formé, afin de l'aplatir et la déposer sur un plan. On obtient alors un graphe dans le plan ayant $s' = s$ sommets, $a' = a$ arêtes et $f' = f - 1$ faces. Enfin, on modifie ce graphe planaire à l'aide d'opérations décrites dans les questions suivantes.

6. *Pour chaque face ayant plus de trois côtés, on ajoute une arête reliant deux sommets qui ne sont pas déjà reliés par une arête. Que devient la quantité $s' - a' + f'$? On répète cette opération jusqu'à ce que toutes les faces aient exactement trois côtés.*

▶ À chaque opération, on ajoute une arête (donc a' devient $a' + 1$), on crée deux faces à partir d'une seule (donc f' devient $f' + 1$), mais on ne modifie pas le nombre de sommets (donc s' reste égal à s'). La quantité $s' - a' + f'$ reste donc $\boxed{\text{inchangée}}$ car :

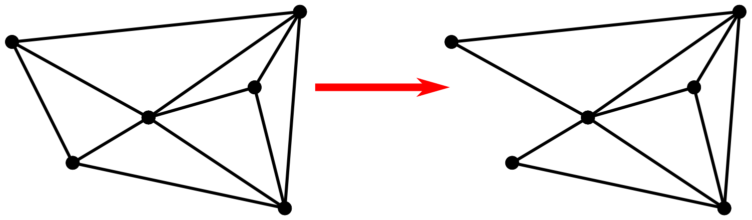
$$s' - (a' + 1) + (f' + 1) = s' - a' + f'.$$



7. *Pour chaque face ayant un seul côté à la frontière du graphe (c'est-à-dire une arête ne séparant pas deux faces), on supprime l'arête formant ce côté. Que devient la quantité $s' - a' + f'$?*

   ▶ À chaque opération, on supprime une arête (donc a' devient $a' - 1$) et une face (donc f' devient $f' - 1$) mais on ne modifie pas le nombre de sommets (donc s' reste égal à s'). La quantité $s' - a' + f'$ reste donc $\boxed{\text{inchangée}}$ car :

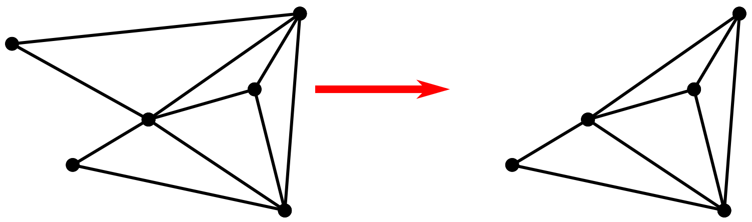
$$s' - (a' - 1) + (f' - 1) = s' - a' + f'.$$



8. *Pour chaque face ayant deux côtés à la frontière du graphe, on supprime les deux arêtes formant ces côtés ainsi que leur sommet commun. Que devient la quantité $s' - a' + f'$?*

   ▶ À chaque opération, on supprime deux arêtes (donc a' devient $a' - 2$), un sommet (donc s' devient $s' - 1$) et une face (donc f' devient $f' - 1$). La quantité $s' - a' + f'$ reste donc $\boxed{\text{inchangée}}$ car :

$$(s' - 1) - (a' - 2) + (f' - 1) = s' - a' + f'.$$



9. *On répète les deux opérations précédentes jusqu'à n'avoir plus qu'une seule face. Conclure.*

   ▶ Lorsqu'on n'a plus qu'une seule face, on a $s' = 3$, $a' = 3$ et $f' = 1$, donc : $s' - a' + f' = 1$. Puisque la quantité $s' - a' + f'$ ne change pas durant toutes les opérations effectuées (d'après les résultats des questions précédentes), elle est donc constante égale à 1. Or on a avant de commencer les opérations :

$$s' - a' + f' = s - a + (f - 1) = (s - a + f) - 1$$

   donc $(s - a + f) - 1 = 1$. On en déduit bien la relation de Descartes-Euler :

$$\boxed{s - a + f = 2}.$$

10. *Application : est-il possible de concevoir un ballon de football en cousant des pièces de cuir qui sont toutes hexagonales ? Indication : raisonner par l'absurde en exprimant s, a et f en fonction de nombre N de pièces de cuir.*

   ▶ Par l'absurde, on suppose qu'on peut concevoir un ballon de football en cousant N pièces de cuir qui sont toutes hexagonales. Les coutures forment alors un graphe sur la surface sphérique du ballon ayant s sommets, a arrêtes et $\boxed{f = N}$ faces. Puisque chaque face est hexagonale, il y a $6f = 6N$ arêtes aux côtés des faces. Mais chaque arête est comptée deux fois car elle est commune à 2 faces. Par conséquent, $6N = 2a$ et donc $\boxed{a = 3N}$. De même, il y a $6f = 6N$ sommets aux coins des faces qui sont chacun commun à 3 faces. Par conséquent, $6N = 3s$ et donc $\boxed{s = 2N}$. D'après le théorème de Descartes-Euler, on en déduit que :

$$2 = s - a + f = 2N - 3N + N = 0$$

   ce qui est absurde. Il n'est donc $\boxed{\text{pas possible}}$ de concevoir un ballon de football avec seulement des pièces de cuir hexagonales.

Si on regarde attentivement un ballon de football, on remarque qu'il est constitué de 32 pièces de cuir : 20 hexagonales et 12 pentagonales. Les coutures forment un graphe de 60 sommets (chacun commun à 3 faces), 90 arêtes et 32 faces, vérifiant bien la relation de Descartes-Euler : $60 - 90 + 32 = 2$.

Partie III - Résolution du problème

On fixe un nombre $k \geqslant 1$ de coups de couteau et on réalise un coup de couteau supplémentaire.

11. Dénombrer les points d'intersection entre le cercle formé par le nouveau coup de couteau et les k cercles précédents. En déduire $s_{k+1} - s_k$ en fonction de k.

▶ Puisque chaque paire de cercles s'intersecte (par hypothèse de l'énoncé pour minimiser le nombre de coups de couteau), le nouveau cercle va intersecter chaque cercle précédent en deux points, créant ainsi $2k$ points d'intersection. De plus, aucun de ces $2k$ points d'intersection n'étaient déjà comptés parmi les s_k sommets précédents car le nouveau cercle ne passe par aucune intersection des cercles précédents (par hypothèse de l'énoncé pour minimiser le nombre de coups de couteau). On en déduit que $s_{k+1} = s_k + 2k$ et donc $\boxed{s_{k+1} - s_k = 2k}$.

Les deux hypothèses de l'énoncé sont nécessaires pour justifier ce raisonnement. N'oubliez pas de les citer.

12. Combien d'arêtes se rejoignent en chaque sommet ? En déduire une relation entre a_k et s_k, puis $a_{k+1} - a_k$ en fonction de k.

▶ Puisque chaque cercle ne passe par aucune intersection de deux autres cercles (par hypothèse de l'énoncé, pour minimiser le nombre de coups de couteau), chaque sommet est le point d'intersection de 2 cercles. On en déduit que $\boxed{\text{4 arêtes se rejoignent en chaque sommet}}$. Au total, il y a donc $4s_k$ arêtes qui se rejoignent aux sommets. Mais chaque arête est comptée deux fois car elle joint 2 sommets. Par conséquent, $4s_k = 2a_k$ et donc $\boxed{2s_k = a_k}$. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$a_{k+1} - a_k = 2s_{k+1} - 2s_k = 2(s_{k+1} - s_k) = 2(2k) = \boxed{4k}.$$

Comme à la question précédente, n'oubliez de citer l'hypothèse nécessaire à ce raisonnement.

13. À l'aide du théorème de Descartes-Euler, exprimer $f_{k+1} - f_k$ en fonction de k.

▶ D'après le théorème de Descartes-Euler, on a :

$$s_k - a_k + f_k = 2 \quad \text{donc} \quad f_k = 2 - s_k + a_k \quad \text{et de même} \quad f_{k+1} = 2 - s_{k+1} + a_{k+1}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} f_{k+1} - f_k &= (2 - s_{k+1} + a_{k+1}) - (2 - s_k + a_k) \\ &= -(s_{k+1} - s_k) + (a_{k+1} - a_k) \\ &= -2k + 4k \quad \text{d'après les résultats des questions précédentes} \\ &= \boxed{2k}. \end{aligned}$$

14. En calculant $\sum_{k=1}^{n-1}(f_{k+1} - f_k)$ de deux manières différentes, déterminer f_n en fonction de n.

▶ On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1}(f_{k+1} - f_k) &= \sum_{k=1}^{n-1} 2k \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\ &= 2\sum_{k=1}^{n-1} k \quad \text{par linéarité} \\ &= 2\frac{(n-1)(n-1+1)}{2} \quad \text{en reconnaissant la somme des premiers entiers} \\ &= n^2 - n. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(f_{k+1}-f_k) &= f_n - f_1 \quad \text{en reconnaissant une somme télescopique}\\ &= f_n - 2 \quad \text{car } f_1 = 2.\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{f_n = n^2 - n + 2}.$$

15. *Résoudre le problème pour une classe de 42 étudiants.*

► D'après le résultat de la question précédente, on peut dresser le tableau des valeurs de f_n pour les premières valeurs de n :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	2	4	8	14	22	32	44	58	74	92

Une classe de ? ? étudiants doit donc réaliser au minimum $\boxed{\text{? ? coups de couteau}}$ pour que chaque étudiant reçoive au moins une part.

Vérifiez la cohérence de vos résultats avec les questions précédentes. Vous devez retrouver que $f_1 = 2$ (énoncé), $f_2 = 4$ (question 2), $f_3 = 8$ (question 4) et $f_4 = 14$ (question 5).

Partie IV - Aux frontières du réel

Dans un univers parallèle à quatre dimensions, une classe d'hyper-étudiants considère le même problème. Chaque coup de leur hyper-couteau forme à la «surface» de leur hyper-pastèque une sphère tridimensionnelle (au lieu de la vulgaire découpe circulaire bidimensionnelle de notre univers à trois dimensions). Après n coups d'hyper-couteau, les sphères délimitent un nombre h_n de solides (des «hyper-faces») égal au nombre de morceaux quadridimensionnels de l'hyper-pastèque.

Afin de minimiser le nombre de coups d'hyper-couteau, on suppose que chaque paire de sphères s'intersecte (donc selon un cercle), et que chaque sphère ne passe par aucun cercle d'intersection de deux autres sphères.

16. *Déterminer h_1, h_2, h_3, et h_4.*

► Dans notre univers à trois dimensions, si chaque premier coup de couteau est réalisé orthogonalement à l'un des trois axes de coordonnées, chaque morceau de la pastèque est découpé en deux. Ainsi $f_1 = 2$, $f_2 = 2 \times 2 = 4$ (on retrouve le résultat de la question 2) et $f_3 = 4 \times 2 = 8$ (on retrouve le résultat de la question 4).

Attention : ce raisonnement est faux à partir de $n \geqslant 4$ coups de couteau puisque certains morceaux ne seront pas découpés (ainsi $f_4 = 14 < 16 = 8 \times 2$). Pour que ce raisonnement soit vrai, il est nécessaire d'utiliser les axes de coordonnées. Or il y en a seulement 3 dans notre univers à trois dimensions.

De même, dans un univers à quatre dimensions, si chaque premier coup d'hyper-couteau est réalisé orthogonalement à l'un des quatre axes de coordonnées, chaque morceau quadridimensionnel de l'hyper-pastèque est découpé en deux. Par conséquent :

$$\boxed{h_1 = 2}, \quad \boxed{h_2 = 2 \times 2 = 4}, \quad \boxed{h_3 = 4 \times 2 = 8} \quad \text{et} \quad \boxed{h_4 = 8 \times 2 = 16}.$$

De même, ce raisonnement est faux à partir de $n \geqslant 5$ coups d'hyper-couteau. Ainsi $h_5 < 32 = 16 \times 2$.

17. Justifier que $h_{k+1} - h_k = k^2 - k + 2$ pour tout $k \geqslant 1$.

▶ On fixe un nombre $k \geqslant 1$ de coups d'hyper-couteau et on réalise un coup de couteau supplémentaire.

Puisque chaque paire de sphère s'intersecte (par hypothèse de l'énoncé pour minimiser le nombre de coups d'hyper-couteau), la nouvelle sphère va intersecter chaque sphère précédente selon un cercle. Ces k cercles forment un graphe sur la nouvelle sphère dont chaque face découpe un des solides précédents en deux. Le nombre de morceaux quadridimensionnels de l'hyper-pastèque augmente donc du nombre f_k de faces sur la nouvelle sphère. On en déduit que $h_{k+1} - h_k = f_k$.

De plus, puisque chaque paire de sphère s'intersecte (par hypothèse de l'énoncé pour minimiser le nombre de coups d'hyper-couteau), chaque paire de cercle sur la nouvelle sphère s'intersecte. De même, puisque chaque sphère ne passe par aucun cercle d'intersection de deux autres sphères (par hypothèse de l'énoncé pour minimiser le nombre de coups d'hyper-couteau), chaque cercle sur la nouvelle sphère ne passe par aucune intersection de deux autres cercles.

N'oubliez pas de vérifier les hypothèses formulées dans la partie I pour pouvoir appliquer le résultat de la partie III.

On en déduit que $f_k = k^2 - k + 2$ d'après le résultat de la question 14. Finalement, on a bien montré que :

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \quad h_{k+1} - h_k = k^2 - k + 2}.$$

18. En déduire h_n en fonction de n.

▶ On raisonne comme à la question 14. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} (h_{k+1} - h_k) &= \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - k + 2) \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k + 2 \sum_{k=1}^{n-1} 1 \quad \text{par linéarité} \\
&= \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} - \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + 2(n-1) \\
&= \frac{n-1}{6}\Big(n(2n-1) - 3n + 12\Big) = \frac{n-1}{6}\Big(2n^2 - 4n + 12\Big) \\
&= \frac{1}{6}\Big(2n^3 - 6n^2 + 16n - 12\Big) = \frac{n}{3}\Big(n^2 - 3n + 8\Big) - 2.
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} (h_{k+1} - h_k) &= h_n - h_1 \quad \text{en reconnaissant une somme télescopique} \\
&= h_n - 2 \quad \text{car } h_1 = 2.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{h_n = \frac{n}{3}\Big(n^2 - 3n + 8\Big)}.$$

19. Résoudre le problème pour une classe de 42 hyper-étudiants.

▶ D'après le résultat de la question précédente, on peut dresser le tableau des valeurs de h_n pour les premières valeurs de n :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h_n	2	4	8	16	30	52	84	128	186	260

Dans un univers à quatre dimensions, une classe de 42 étudiants doit donc réaliser au minimum $\boxed{\text{7 coups d'hyper-couteau}}$ pour que chaque étudiant reçoive au moins une part.

Vérifiez la cohérence de vos résultats avec ceux de la question 16.

20. *Qu'en-est-il pour une classe de 42 infra-étudiants vivant dans un autre univers parallèle à seulement deux dimensions ?*

► Dans un univers à deux dimensions, on peut modéliser l'infra-pastèque par un cercle, et chaque coup d'infra-couteau par deux points opposés à la «surface» du cercle. Après n coups d'infra-couteau, on obtient $2n$ points qui partagent le cercle en $2n$ arcs de cercles, et donc l'infra-pastèque en $\boxed{2n}$ morceaux. Dans cet univers, une classe de 42 étudiants doit donc réaliser au minimum $\boxed{\text{21 coups d'infra-couteau}}$ pour que chaque étudiant reçoive au moins une part.

Si on note $M_n(d)$ le nombre maximal de morceaux de pastèque obtenu après n coups de couteau dans un univers à d dimensions, on a donc montré que :

$$M_n(2) = 2n, \quad M_n(3) = n^2 + n - 2 \quad \text{et} \quad M_n(4) = \frac{n}{3}\left(n^2 - 3n + 8\right).$$

De plus, on a montré les relations $M_{k+1}(3) - M_k(3) = M_k(2)$ à la question 13 et $M_{k+1}(4) - M_k(4) = M_k(3)$ à la question 17. En généralisant le raisonnement de la question 17, on peut démontrer que :

$$M_{k+1}(d) - M_k(d) = M_k(d-1).$$

Ainsi, en raisonnant comme à la question 14 et la question 18, on peut en déduire $M_n(d)$ par récurrence à l'aide de $M_n(d-1)$:

$$M_n(d) = \sum_{k=1}^{n-1} M_k(d-1) + 2 \quad \text{car } M_1(d) = 2.$$

Par exemple, on obtient dans un univers à cinq dimensions :

$$M_n(5) = \frac{1}{12}\left(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24\right).$$