

Programme de khôlles n° 1

semaine du 17 au 22 septembre

Mots-clefs

- **Logique** : assertion, prédicat, table de vérité, proposition, tautologie, négation «non», conjonction «et», disjonction inclusive «ou», disjonction exclusive «ou bien», propriétés des opérateurs logiques (principe de double négation, commutativité, associativité, distributivité, lois de De Morgan), implication « \implies », condition suffisante, condition nécessaire, réciproque, équivalence « \iff », propriétés de l'implication (antisymétrie, transitivité, principe de déduction, principe de contraposition, négation d'une implication).
- **Ensembles** : ensemble, élément, appartenance, l'ensemble vide \emptyset , représentation par propriétés, représentation par paramètres, sous-ensemble, inclusion, propriétés de l'inclusion (antisymétrie, transitivité) ensemble des parties, complémentaire, différence, intersection et union de deux ensembles, intersection et union d'une famille d'ensembles, propriétés des opérations sur les ensembles (commutativité, associativité, distributivité, ensemble neutre, ensemble absorbant, lois de De Morgan), ensembles deux à deux disjoints, partition (système complet), produit cartésien.
- **Quantificateurs** : quantificateur universel \forall , quantificateur existentiel \exists , règles d'utilisation des quantificateurs, ordre des quantificateurs, négation de propositions quantifiées.
- **Nombres entiers et récurrence** : l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} , l'ensemble des entiers relatifs \mathbb{Z} , intervalle d'entiers $\llbracket k, \ell \rrbracket$, principe de récurrence simple, principe de récurrence double. ^[1]
- **Nombres réels** : l'ensemble des nombres rationnels \mathbb{Q} , l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} , écriture décimale d'un nombre réel, propriétés des opérations sur les réels (commutativité, associativité, distributivité, éléments neutres, élément absorbant, opposé, inverse, intégrité), congruence, inégalité, propriété de l'inégalité (antisymétrie, transitivité, compatibilité avec l'addition, positive compatibilité avec la multiplication, passage à l'opposé, passage à l'inverse), intervalles.

Savoir-faire

- Connaître les lettres de l'alphabet grec fréquemment utilisées en mathématiques.
- Prouver une proposition logique à l'aide d'une table de vérité.
- Comprendre un ensemble représenté par description (liste des éléments), par propriétés (équations cartésiennes) ou par paramètres (représentations paramétriques).
- Comprendre une intersection ou une union d'un nombre quelconque d'intervalles réels.
- Déterminer la négation d'une proposition quantifiée.
- Rédiger des raisonnements logiques issus de révisions du lycée (nombres réels et complexes, égalités et inégalités, équations et inéquations, suites et fonctions, etc.). En particulier : prouver une implication (directement ou par contraposition), prouver une ou plusieurs équivalences, raisonner par déduction, raisonner par l'absurde, démontrer une proposition commençant par \forall (éventuellement par disjonction de cas), démontrer une proposition commençant par \exists (par analyse-synthèse ou à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires), démontrer l'unicité dans le cas d'une proposition commençant par $\exists!$, prouver une inclusion ou une égalité d'ensembles.
- Rédiger un raisonnement par récurrence simple. ^[1]

Exemples de questions de cours

- Rappeler et démontrer une des propriétés des opérateurs logiques.
- Rappeler et démontrer une des propriétés des opérations sur les ensembles.
- Démontrer « $\text{non}(\forall x \in E, P(x)) \iff (\exists x \in E, \text{non}(P(x)))$ » ou « $\text{non}(\exists x \in E, P(x)) \iff (\forall x \in E, \text{non}(P(x)))$ ».
- Démontrer que pour tout $(x, a) \in \mathbb{R}^2$ et tout $\varepsilon > 0$ on a : $|x - a| \leq \varepsilon \iff x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.
- Rappeler et démontrer l'inégalité triangulaire : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| \leq |x| + |y|$.
- Démontrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \max\{x, y\} = (x + y + |x - y|)/2$.

Notes aux khôleurs

- ^[1] Pas d'exercices sur la récurrence double cette semaine.