

Programme de khôlles n° 14

semaine du 14 au 19 janvier

Mots-clefs

- **EDL à coeff. constants d'ordre 1 et 2** : équations différentielles, EDL, ordre, EDL homogènes, EDL à coefficients constants, principe de superposition, forme de l'ensemble des solutions, résolution des EDL homogènes à coefficients constants d'ordre 1, résolution des EDL homogènes à coefficients constants d'ordre 2, résolution des EDL à coefficients constants d'ordre 1, résolution des EDL homogènes à coefficients constants d'ordre 2.
- **Matrices** : définition, taille d'une matrice, l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n , les matrices $0_{n,p}$ et I_n , matrices diagonales, matrices symétriques, matrices triangulaires supérieures ou inférieures, opérations sur les matrices (multiplication par un scalaire, addition, multiplication, transposition), propriétés des opérations sur les matrices, puissance entière d'une matrice carrée, expression polynomiale d'une matrice carrée, formule du binôme de Newton pour les matrices, matrices inversibles, l'ensemble $\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$, propriétés des matrices inversibles, déterminant et inverse d'une matrice carrée d'ordre 2, équivalent matriciel d'un système linéaire, matrices équivalentes, matrices échelonnées, méthode du pivot de Gauss pour les matrices, rang d'une matrice, rang d'une matrice inversible, inverse d'une matrice de rang maximal. [1]
- **Convergence de suites réelles** : suites convergentes, unicité de la limite, limite d'une suite convergente, suites divergentes de 1^{re} espèce, limite d'une suite divergente de 1^{re} espèce, suites divergentes de 2^e espèce, nature d'une suite, opérations sur les limites (somme, produit, quotient, composition, puissance), toute suite convergente est bornée, passage à la limite dans des inégalités, théorème de la limite par encadrement, produit d'une suite bornée et d'une suite convergente vers 0, théorème de la limite par comparaison, théorème des suites extraites, théorème de la limite monotone, théorème des suites adjacentes. [2]

Savoir-faire

- Trouver une solution particulière d'une EDL à coeff. constants d'ordre 1 ou 2. [3]
- Résoudre des EDL à coeff. constants d'ordre 1 ou 2 à l'aide du principe de superposition.
- Calculer le rang d'une matrice.
- Montrer qu'une matrice carrée est inversible (à l'aide du déterminant dans le cas d'une matrice carrée d'ordre 2 ou par calcul du rang).
- Calculer l'inverse d'une matrice inversible par résolution d'un système linéaire.
- Calculer les puissances d'une matrice carrée (cas des matrices nilpotentes, par récurrence, à l'aide d'un polynôme annulateur, à l'aide de la formule du binôme de Newton, à l'aide d'une matrice semblable).
- Étudier la nature d'une suite réelle à l'aide des définitions.

Exemples de questions de cours

- Rappeler la forme des solutions d'une EDL homogène à coeff. constants d'ordre 2 dans chacun des cas selon le signe du discriminant de l'équation caractéristique associée.
- Démontrer que le produit matriciel est associatif.
- Rappeler et démontrer que ${}^t(AB) = ({}^tB)({}^tA)$
- Montrer que si A et B sont deux matrices inversibles alors AB aussi en rappelant l'expression de $(AB)^{-1}$.
- Montrer que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ en rappelant l'expression de A^{-1} .
- Calculer $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
- Démontrer l'unicité de la limite d'une suite convergente.
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.
- Montrer que toute suite convergente est bornée.
- Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n > 0$ alors (u_n) est positive à partir d'un certain rang.
- Rappeler et démontrer le théorème de limite par comparaison.
- Rappeler et démontrer le théorème de la limite monotone.
- Rappeler et démontrer le théorème des suites adjacentes.

Notes aux khôleurs

- [1] Pour rappel : le déterminant pour des matrices carrées d'ordre > 2 est hors programme de BCPST.
- [2] Pas d'exercices utilisant les théorèmes généraux (limite par encadrement, limite par comparaison, suites extraites, limite monotone, suites adjacentes) cette semaine. Seulement la justification de la nature d'une suite à l'aide des définitions ou des calculs de limites à l'aide des opérations usuelles.
- [3] On donnera la forme d'une solution particulière.