

# Programme de khôlles n° 15

## semaine du 18 au 23 janvier

### Mots-clefs

- **Matrices** : définition, taille d'une matrice, l'ensemble  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , l'ensemble  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  des matrices carrées d'ordre  $n$ , les matrices  $0_{n,p}$  et  $I_n$ , matrices diagonales, matrices symétriques, matrices triangulaires supérieures ou inférieures, opérations sur les matrices (multiplication par un scalaire, addition, multiplication, transposition), propriétés des opérations sur les matrices, puissance entière d'une matrice carrée, expression polynomiale d'une matrice carrée, formule du binôme de Newton, matrices inversibles, l'ensemble  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ , propriétés des matrices inversibles, déterminant et inverse d'une matrice carrée d'ordre 2, équivalent matriciel d'un système linéaire, matrices équivalentes, matrices échelonnées, méthode du pivot de Gauss pour les matrices, rang d'une matrice, rang d'une matrice inversible, inverse d'une matrice de rang maximal. <sup>[1]</sup>
- **Convergence de suites réelles** : suites convergentes, unicité de la limite, limite d'une suite convergente, suites divergentes de 1<sup>re</sup> espèce, limite d'une suite divergente de 1<sup>re</sup> espèce, suites divergentes de 2<sup>e</sup> espèce, nature d'une suite, opérations sur les limites (somme, produit, quotient, composition, puissance), toute suite convergente est bornée, passage à la limite dans des inégalités, théorème de la limite par encadrement, produit d'une suite bornée et d'une suite convergente vers 0, théorème de la limite par comparaison, théorème des suites extraites, théorème de la limite monotone, théorème des suites adjacentes. <sup>[2]</sup>

### Savoir-faire

- Manipuler des matrices (multiplication par un scalaire, addition, multiplication, transposition, expression polynomiale d'une matrice carrée).
- Déterminer toutes les matrices qui commutent avec une matrice donnée (à l'aide d'un système linéaire).
- Utiliser la formule du binôme de Newton pour les matrices.
- Calculer le rang d'une matrice.
- Montrer qu'une matrice carrée est inversible (à l'aide du déterminant dans le cas d'une matrice carrée d'ordre 2 ou par calcul du rang).
- Calculer l'inverse d'une matrice inversible par résolution d'un système linéaire.
- Calculer les puissances d'une matrice carrée (cas des matrices nilpotentes, par récurrence, à l'aide d'un polynôme annulateur, à l'aide de la formule du binôme de Newton, à l'aide d'une matrice semblable).
- Étudier la nature d'une suite réelle à l'aide des théorèmes généraux (limite par encadrement, limite par comparaison, suites extraites, limite monotone, suites adjacentes).
- Calculer des limites à l'aide des opérations usuelles (somme, produit, quotient, composition, puissance).
- Lever une forme indéterminée dans un calcul de limites.

### Exemples de questions de cours

- Montrer que si  $A$  et  $B$  sont deux matrices inversibles alors  $AB$  aussi en rappelant l'expression de  $(AB)^{-1}$ .
- Montrer que  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  est inversible si et seulement si  $\det(A) \neq 0$  en rappelant l'expression de  $A^{-1}$ .
- Rappeler la définition d'une suite convergente et montrer qu'une suite simple converge à l'aide de la définition.
- Démontrer l'unicité de la limite d'une suite convergente.
- Rappeler la définition d'une suite divergente vers  $+\infty$  et montrer qu'une suite simple diverge vers  $+\infty$  à l'aide de la définition.
- Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ .
- Montrer que toute suite convergente est bornée.
- Montrer que si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n > 0$  alors  $(u_n)$  est positive à partir d'un certain rang.
- Rappeler et démontrer le théorème de limite par encadrement.
- Démontrer que le produit d'une suite bornée et d'une suite convergente vers 0 converge vers 0.
- Rappeler et démontrer le théorème de limite par comparaison.
- Rappeler et démontrer le théorème de la limite monotone.
- Rappeler et démontrer le théorème des suites adjacentes.

### Notes aux khôleurs

- <sup>[1]</sup> Pour rappel : le déterminant pour des matrices carrées d'ordre  $> 2$  est hors programme de BCPST.
- <sup>[2]</sup> Pas de comparaison de suites cette semaine. En particulier, pas de calculs de limites utilisant des équivalents ou le théorème des croissances comparées.