

# Programme de khôlles n° 15

## semaine du 21 au 26 janvier

### Mots-clefs

- **Matrices** : définition, taille d'une matrice, l'ensemble  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , l'ensemble  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  des matrices carrées d'ordre  $n$ , les matrices  $0_{n,p}$  et  $I_n$ , matrices diagonales, matrices symétriques, matrices triangulaires supérieures ou inférieures, opérations sur les matrices (multiplication par un scalaire, addition, multiplication, transposition), propriétés des opérations sur les matrices, puissance entière d'une matrice carrée, expression polynomiale d'une matrice carrée, formule du binôme de Newton pour les matrices, matrices inversibles, l'ensemble  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ , propriétés des matrices inversibles, déterminant et inverse d'une matrice carrée d'ordre 2, équivalent matriciel d'un système linéaire, matrices équivalentes, matrices échelonnées, méthode du pivot de Gauss pour les matrices, rang d'une matrice, rang d'une matrice inversible, inverse d'une matrice de rang maximal. <sup>[1]</sup>
- **Convergence de suites réelles** : suites convergentes, unicité de la limite, limite d'une suite convergente, suites divergentes de 1<sup>re</sup> espèce, limite d'une suite divergente de 1<sup>re</sup> espèce, suites divergentes de 2<sup>e</sup> espèce, nature d'une suite, opérations sur les limites (somme, produit, quotient, composition, puissance), toute suite convergente est bornée, passage à la limite dans des inégalités, théorème de la limite par encadrement, produit d'une suite bornée et d'une suite convergente vers 0, théorème de la limite par comparaison, théorème des suites extraites, théorème de la limite monotone, théorème des suites adjacentes, suites négligeables, notation  $o_{n \rightarrow +\infty}$ , propriétés des suites négligeables, théorème des croissances comparées, suites équivalentes, notation  $\sim_{n \rightarrow +\infty}$ , propriétés et opérations sur les suites équivalentes, liens entre limites et suites équivalentes, équivalents usuels.

### Savoir-faire

- Calculer le rang d'une matrice.
- Montrer qu'une matrice carrée est inversible (à l'aide du déterminant dans le cas d'une matrice carrée d'ordre 2 ou par calcul du rang).
- Calculer l'inverse d'une matrice inversible par résolution d'un système linéaire.
- Calculer les puissances d'une matrice carrée (cas des matrices nilpotentes, par récurrence, à l'aide d'un polynôme annulateur, à l'aide de la formule du binôme de Newton, à l'aide d'une matrice semblable).
- Étudier la nature d'une suite réelle à l'aide des définitions ou des théorèmes généraux.
- Étudier la nature d'une suite récurrente.
- Étudier la nature d'une suite implicite.
- Utiliser le théorème des croissances comparées pour calculer des limites.
- Déterminer un équivalent simple d'une suite réelle.
- Utiliser des équivalents pour calculer des limites.

### Exemples de questions de cours

- Démontrer l'unicité de la limite d'une suite convergente.
- Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ .
- Montrer que toute suite convergente est bornée.
- Montrer que si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n > 0$  alors  $(u_n)$  est positive à partir d'un certain rang.
- Rappeler et démontrer le théorème de limite par comparaison.
- Rappeler et démontrer le théorème de la limite monotone.
- Rappeler et démontrer le théorème des suites adjacentes.
- Rappeler le théorème des croissances comparées et démontrer que  $\ln(x) = o_{n \rightarrow +\infty}(n^\alpha)$  ou que  $r^n = o_{n \rightarrow +\infty}(n!)$ .
- Rappeler quelques équivalents usuels et démontrer celui de  $\cos(u_n) - 1$  quand  $u_n \rightarrow 0$ .

### Notes aux khôleurs

- <sup>[1]</sup> Pour rappel : le déterminant pour des matrices carrées d'ordre  $> 2$  est hors programme de BCPST.