

Programme de khôlles n° 2

semaine du 26 septembre au 1^{er} octobre

Mots-clefs

- **Logique élémentaire** : assertion, table de vérité, négation «non», conjonction «et», disjonction «ou», propriétés des opérateurs logiques (commutativité, associativité, distributivité, lois de De Morgan), implication \implies , condition nécessaire, condition suffisante, réciproque, contraposée, propriétés de l'implication (principe de contraposition, transitivité, négation), équivalence \iff .
- **Vocabulaire des ensembles** : ensemble, élément, appartenance \in , l'ensemble vide \emptyset , représentation par propriétés ou par paramètres, inclusion \subset , sous-ensemble (ou partie), propriétés de l'inclusion (antisymétrie, transitivité), ensemble des parties, complémentaire, exclusion, intersection \cap , ensembles disjoints, réunion \cup , propriétés des opérations avec des ensembles (commutativité, associativité, distributivité, lois de De Morgan), produit cartésien, couple, p -uplet (ou liste), quantificateur universel \forall , quantificateur existentiel \exists , règles d'utilisation des quantificateurs, ordre des quantificateurs, négation d'une assertion quantifiée.
- **Raisonnement par récurrence** : principe de récurrence simple, principe de récurrence double.
- **Nombres réels** : l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} , propriétés des opérations algébriques avec des réels, intervalles, valeur absolue, propriétés de la valeur absolue (multiplicativité, inégalité triangulaire), partie entière, puissance (d'exposants entiers), racine carrée, racine cubique, propriétés des puissances et des racines, identités remarquables, règles de calcul algébrique avec des inégalités, majorant, minorant, plus grand élément, plus petit élément, borne supérieure, borne inférieure. 1

Savoir-faire

- Connaître les lettres de l'alphabet grec fréquemment utilisées en mathématiques.
- Prouver une proposition logique à l'aide d'une table de vérité.
- Comprendre un ensemble représenté par description (liste des éléments), par propriétés (équations cartésiennes) ou par paramètres (représentation paramétrique).
- Comprendre une intersection ou une union d'un nombre fini d'intervalles réels.
- Comprendre un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.
- Comprendre une proposition quantifiée.
- Déterminer la négation d'une proposition quantifiée.
- Rédiger des raisonnements logiques issus de révisions du lycée (nombres réels, égalités et inégalités, équations et inéquations, suites et fonctions simples, etc.). En particulier : prouver une implication (directement ou par contraposition), prouver une ou plusieurs équivalences, raisonner par déduction, raisonner par l'absurde, prouver une proposition commençant par \forall (éventuellement par disjonction de cas), prouver une proposition commençant par \exists (par analyse-synthèse), prouver une inclusion ou une égalité d'ensembles. 2
- Rédiger un raisonnement par récurrence simple ou double.

Exemples de questions de cours

- Rappeler une des propriétés des opérateurs logiques et la démontrer à l'aide d'une table de vérité.
- Rappeler une des propriétés des opérations avec des ensembles et la démontrer.
- Prouver « $\text{non}(\forall x \in E, P(x)) \iff (\exists x \in E, \text{non}(P(x)))$ » ou « $\text{non}(\exists x \in E, P(x)) \iff (\forall x \in E, \text{non}(P(x)))$ ». 3
- Montrer que $|x - a| \leq \varepsilon$ est équivalent à $x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.
- Rappeler et démontrer l'inégalité triangulaire : $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| \leq |x| + |y|$.
- Rappeler et montrer que : $\forall(a, b) \in]0, +\infty[^2, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
- Rappeler et montrer que : $\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2, \exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$.
- Montrer que : $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, \max(x, y) = (x + y + |x - y|)/2$.
- Démontrer l'inégalité de Bernoulli : $\forall n \geq 2, \forall x > 0, (1 + x)^n > 1 + nx$.
- Rappeler la définition de la partie entière et démontrer son unicité.
- Rappeler la définition de $\max(A)$ et $\sup(A)$ (où $A \subset \mathbb{R}$) et démontrer l'unicité du plus grand élément.

Notes aux khôleurs

- 1 Les puissances d'exposants réels n'ont pas encore été introduites dans le cours.
- 2 Les nombres complexes ne font plus partie des révisions du lycée.
- 3 On attend une démonstration qui traduit les propositions quantifiées avec des ensembles.