Programme de khôlles n° 20

semaine du 13 au 18 mars

Mots-clefs

— **Comportement asymptotique de suites réelles** : suites convergentes, unicité de la limite, suites divergentes vers $+\infty$ ou $-\infty$ (divergence de 1^re^ espèce), suites divergentes de 2^e^ espèce, théorème des suites extraites (de rangs pairs et impairs), opérations avec des limites, limites et inégalités, théorème de la limite par encadrement, théorème de la limite par comparaison, théorème de la limite monotone, théorème des suites adjacentes, suites négligeables, notation $o_{n\to+\infty}$, théorème des croissances comparées, suites équivalentes, notation $\sim_{n\to+\infty}$, propriétés des suites équivalentes, équivalents usuels, calculs de limites à l'aide d'équivalents.

— **Géométrie du plan et de l'espace** : le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, propriétés des opérations avec des vecteurs, colinéarité, coplanarité, famille de vecteurs liée (linéairement dépendante), famille de vecteurs libres (linéairement indépendante), bases, base canonique, coordonnées de vecteurs, produit scalaire, propriétés du produit scalaire, orthogonalité, norme, propriétés de la norme, théorème de Pythagore, inégalité de Cauchy-Schwarz, bases orthonormées, plan affine et espace affine, relation de Chasles, alignement, repères, coordonnées de points, repères orthonormés, distance, projection orthogonale, droites du plan, cercles du plan, plans de l'espace, droites de l'espace. $\boxed{1}$

Savoir-faire

— Montrer qu'une suite n'admet pas de limite à l'aide du théorème des suites extraites (de rangs pairs et impairs).
— Calculer des limites à l'aide des opérations usuelles.
— Montrer qu'une suite est convergente à l'aide du théorème de la limite par encadrement.
— Montrer qu'une suite diverge vers $+\infty$ ou ∞ à l'aide du théorème de la limite par comparaison.
— Utiliser le théorème de la limite monotone pour justifier l'existence d'une limite.
— Montrer que deux suites sont adjacentes.
— Étudier la nature d'une suite définie par récurrence.
— Étudier la nature d'une suite implicite.
— Connaître les équivalents usuels.
— Calculer des limites à l'aide d'équivalents.
— Comparer deux suites à l'aide d'équivalents et du théorème des croissances comparées.
— Manipuler des vecteurs du plan ou de l'espace.
— Traduire un énoncé de géométrie en équations à l'aide des coordonnées. $\boxed{1}$
— Déterminer des représentations paramétriques ou des équations cartésiennes de droites du plan, de cercles du plan, de plans de l'espace et de droites de l'espace.
— Reconnaître des équations cartésiennes de droites du plan, de cercles du plan, de plans de l'espace et de droites de l'espace.

Exemples de questions de cours

— Démontrer l'unicité de la limite d'une suite convergente.
— Montrer que toute suite convergente est bornée.
— Montrer que si une suite converge vers $\ell > 0$ alors ses termes sont positifs à partir d'un certain rang.
— Montrer que le produit d'une suite qui converge vers 0 et d'une suite bornée converge vers 0.
— Rappeler le théorème de la limite monotone et démontrer l'un des deux cas (majorée ou non).
— Rappeler et démontrer le théorème des suites adjacentes.
— Rappeler le théorème des croissances comparées et démontrer que $\ln(n) = o_{n\to+\infty}(n^\alpha)$, ou $n^\alpha = o_{n\to+\infty}(q^n)$, ou $q^n = o_{n\to+\infty}(n!)$ (avec $\alpha > 0$ et $q > 1$).
— Rappeler quelques équivalents usuels et montrer que $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Notes aux khôlleurs

— $\boxed{1}$ L'objectif est surtout de réviser l'algèbre linéaire. On posera seulement des exercices d'applications directes du cours (étude de la colinéarité ou de la coplanarité de vecteurs, coordonnées dans une base, manipulation d'équations cartésiennes ou de représentations paramétriques, etc.), en particulier ceux qui peuvent se ramener à des systèmes linéaires et des matrices. Les barycentres ne sont plus au programme de BCPST.