

Programme de khôlles n° 21

semaine du 20 au 25 mars

Mots-clefs

- **Comportement asymptotique de suites réelles** : suites convergentes, unicité de la limite, suites divergentes vers $+\infty$ ou $-\infty$ (divergence de 1^{re} espèce), suites divergentes de 2^e espèce, théorème des suites extraites (de rangs pairs et impairs), opérations avec des limites, limites et inégalités, théorème de la limite par encadrement, théorème de la limite par comparaison, théorème de la limite monotone, théorème des suites adjacentes, suites négligeables, notation $o_{n \rightarrow +\infty}$, théorème des croissances comparées, suites équivalentes, notation $\sim_{n \rightarrow +\infty}$, propriétés des suites équivalentes, équivalents usuels, calculs de limites à l'aide d'équivalents.
- **Géométrie du plan et de l'espace** : le plan euclidien \mathbb{R}^2 et l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , propriétés des opérations avec des vecteurs, colinéarité, coplanarité, famille de vecteurs liée (linéairement dépendante), famille de vecteurs libres (linéairement indépendante), bases, base canonique, coordonnées de vecteurs, produit scalaire, propriétés du produit scalaire, orthogonalité, norme, propriétés de la norme, théorème de Pythagore, inégalité de Cauchy-Schwarz, bases orthonormées, plan affine et espace affine, relation de Chasles, alignement, repères, coordonnées de points, repères orthonormés, distance, projection orthogonale, droites du plan, cercles du plan, plans de l'espace, droites de l'espace. 1
- **Polynômes réels** : définition, monômes, coefficients, le polynôme nul, fonctions constantes, fonctions affines, fonctions puissances d'exposants entiers, opérations sur les polynômes (combinaison linéaire, produit, composée, dérivée), coefficient dominant, degré, racine réelle, polynômes de degré impair, racine et factorisation, nombre maximal de racines, ordre de multiplicité d'une racine. 2

Savoir-faire

- Montrer que deux suites sont adjacentes.
- Étudier la nature d'une suite définie par récurrence.
- Étudier la nature d'une suite implicite.
- Connaître les équivalents usuels.
- Calculer des limites à l'aide d'équivalents.
- Comparer deux suites à l'aide d'équivalents et du théorème des croissances comparées.
- Manipuler des vecteurs du plan ou de l'espace.
- Traduire un énoncé de géométrie en équations à l'aide des coordonnées. 1
- Reconnaître ou déterminer des représentations paramétriques ou des équations cartésiennes de droites du plan, de cercles du plan, de plans de l'espace et de droites de l'espace.
- Manipuler des polynômes réels (en particulier calculer le produit de deux polynômes réels).
- Déterminer le degré d'un polynôme réel.
- Identifier les coefficients de deux polynômes réels.

Exemples de questions de cours

- Rappeler et démontrer le théorème des suites adjacentes.
- Rappeler le théorème des croissances comparées et démontrer que $\ln(n) = o_{n \rightarrow +\infty}(n^\alpha)$, ou $n^\alpha = o_{n \rightarrow +\infty}(q^n)$, ou $q^n = o_{n \rightarrow +\infty}(n!)$ (avec $\alpha > 0$ et $q > 1$).
- Rappeler quelques équivalents usuels et montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Montrer que le produit de polynômes est associatif. 3
- Rappeler et démontrer que $\frac{d^k x^n}{dx^k} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$ si $k \leq n$ et 0 sinon.
- Montrer qu'un polynôme P est factorisable par $x \mapsto (x - \alpha)$ si et seulement si $P(\alpha) = 0$.

Notes aux khôleurs

- 1 L'objectif est surtout de réviser l'algèbre linéaire. On posera seulement des exercices d'applications directes du cours (étude de la colinéarité ou de la coplanarité de vecteurs, coordonnées dans une base, manipulation d'équations cartésiennes ou de représentations paramétriques, etc.), en particulier ceux qui peuvent se ramener à des systèmes linéaires et des matrices. Les barycentres ne sont plus au programme de BCPST.
- 2 Les polynômes complexes ne sont plus au programme de BCSPT1, ni les racines complexes des polynômes réels. Les polynômes réels sont pour l'instant vus seulement comme des fonctions polynomiales et l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ sera introduit seulement en deuxième année. Pas d'exercices sur la factorisation de polynômes, le nombre de racines et l'ordre de multiplicité cette semaine.
- 3 À l'aide du produit de Cauchy. L'idée est de réviser les manipulations d'indices dans les calculs de sommes.