

Programme de khôlles n° 21

semaine du 18 au 23 mars

Mots-clefs

- **Limites de fonctions réelles** : voisinage d'un point, voisinage à droite ou à gauche, voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, limite finie, unicité de la limite, limites infinies, limites à droite et à gauche, opérations sur les limites (somme, produit, quotient, composition, puissance), passage à la limite dans des inégalités, théorème de la limite par encadrement, théorème de la limite par comparaison, théorème de la limite monotone, fonctions négligeables, notation $o_{x \rightarrow a}$, propriétés des fonctions négligeables, théorème des croissances comparées, corollaires du théorème des croissances comparées, fonctions équivalentes, notation $\sim_{x \rightarrow a}$, propriétés et opérations sur les fonctions équivalentes, liens entre limites et fonctions équivalentes, équivalents usuels.
- **Probabilités** : définition d'une probabilité, expérience aléatoire, univers, événement, propriétés de calculs des probabilités, événement complémentaire, événements incompatibles, système complet d'événements, événements élémentaires, construction d'une probabilité à partir des probabilités élémentaires, probabilité uniforme, propriétés de la probabilité uniforme, définition de la probabilité conditionnelle, propriétés des probabilités conditionnelles, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes, événements indépendants, événements mutuellement indépendants, propriétés de l'indépendance.
- **Continuité** : définition de la continuité en un point, caractérisation de la continuité à l'aide des limites à gauche et à droite, définition de la continuité sur une partie de \mathbb{R} , l'ensemble $\mathcal{C}^0(I)$, opérations sur les fonctions continues (somme, produit, quotient, composition), prolongement par continuité, approximation d'une solution d'une équation, algorithme de dichotomie, théorème des valeurs intermédiaires, image d'un intervalle par une fonction continue, courbe représentative d'une fonction continue, théorème de la bijection continue, théorème des bornes, image d'un segment par une fonction continue. ¹

Savoir-faire

- Montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point (à l'aide des limites à gauche et à droite ou de suites).
- Montrer qu'une fonction admet une limite en un point (à l'aide des limites à gauche et à droite ou des théorèmes généraux).
- Étudier les limites d'une fonction implicite.
- Calculer des limites (à l'aide des opérations usuelles, du théorème des croissances comparées ou des équivalents usuels).
- Déterminer un équivalent simple d'une fonction en un point.
- Modéliser une expérience aléatoire.
- Calculer des probabilités (utiliser une situation d'équiprobabilité, utiliser des événements incompatibles, utiliser des événements mutuellement indépendants, utiliser un système complet d'événements, utiliser des probabilités conditionnelles, utiliser un arbre de probabilités, etc.).
- Calculer la probabilité d'une cause sachant la conséquence à l'aide de la formule de Bayes.
- Étudier le prolongement par continuité d'une fonction en un point du bord de son ensemble de définition.

Exemples de questions de cours

- Démontrer l'unicité de la limite (lorsque $x \rightarrow a \in \mathbb{R}$, $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$).
- Rappeler des équivalents usuels.
- Rappeler le théorème des croissances comparées et démontrer que $\ln(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(x^\alpha)$ où $\alpha > 0$.
- En rappelant les définitions, montrer que la probabilité conditionnelle est une probabilité.
- Rappeler et démontrer la formule de Poincaré (pour l'union de deux événements).
- En rappelant les définitions, montrer que les événements élémentaires forment un système complet d'événements.
- Montrer que pour tout $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in [0, 1]^n$, il existe une unique probabilité P sur $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(\{x_i\}) = p_i$ si et seulement si $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.
- Rappeler et démontrer la formule des probabilités composées.
- Rappeler et démontrer la formule des probabilités totales.
- Rappeler et démontrer la formule de Bayes.

Notes aux khôlleurs

- ¹ Pas d'exercices sur la dichotomie ou le théorème des bornes cette semaine. Seulement des justifications de la continuité ou des études de prolongement par continuité.