

# Programme de khôlles n° 22

semaine du 27 mars au 1<sup>er</sup> avril

## Mots-clefs

- **Polynômes réels** : définition, monômes, coefficients, le polynôme nul, fonctions constantes, fonctions affines, fonctions puissances d'exposants entiers, opérations sur les polynômes (combinaison linéaire, produit, composée, dérivée), coefficient dominant, degré, racine réelle, polynômes de degré impair, racine et factorisation, nombre maximal de racines, ordre de multiplicité d'une racine. [1]
- **Limites de fonctions réelles d'une variable** : voisinage de l'infini, limite finie ou infinie en  $+\infty$  ou  $-\infty$ , voisinage d'un point, limite en un point, voisinage à droite ou à gauche, limite finie ou infinie à droite ou à gauche, unicité de la limite, opérations avec des limites, limites et inégalités, théorème de la limite par encadrement, théorème de la limite par comparaison, théorème de la limite monotone, fonctions négligeables, notation  $o_{x \rightarrow a}$ , théorème des croissances comparées, fonctions équivalentes, notation  $\sim_{x \rightarrow a}$ , propriétés des fonctions équivalentes, équivalents usuels, calculs de limites à l'aide d'équivalents.

## Savoir-faire

- Manipuler des polynômes réels (en particulier calculer le produit de deux polynômes réels).
- Déterminer le degré d'un polynôme réel.
- Identifier les coefficients de deux polynômes réels.
- Montrer qu'un polynôme est nul (en trouvant un nombre de racines plus grand que le degré).
- Factoriser un polynôme réel à l'aide de racines évidentes.
- Déterminer l'ordre de multiplicité d'une racine.
- Montrer qu'une limite n'existe pas à l'aide des limites à gauche et à droite.
- Calculer des limites à l'aide des opérations usuelles.
- Calculer des limites à l'aide du théorème des croissances comparées (en changeant de variable si besoin).
- Connaître les équivalents usuels.
- Calculer des limites à l'aide d'équivalents (en changeant de variable si besoin).

## Exemples de questions de cours

- Montrer que le produit de polynômes est associatif. [2]
- Rappeler et démontrer que  $\frac{d^k x^n}{dx^k} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$  si  $k \leq n$  et 0 sinon.
- Montrer qu'un polynôme  $P$  est factorisable par  $x \mapsto (x - \alpha)$  si et seulement si  $P(\alpha) = 0$ .
- Rappeler une des définitions de la limite d'une fonction (limite finie ou infinie en  $+\infty$  ou  $\infty$ , limite en un point, limite finie ou infinie à droite ou à gauche).
- Rappeler le théorème de la limite monotone pour une fonction  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  (tous les cas).
- Rappeler le théorème des croissances comparées et démontrer que  $\ln(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(x^\alpha)$ , ou que  $x^\alpha = o_{x \rightarrow +\infty}(q^x)$  (avec  $\alpha > 0$  et  $q > 1$ ).
- Rappeler quelques équivalents usuels et en démontrer un. [3]

## Notes aux khôleurs

- [1] Les polynômes complexes ne sont plus au programme de BCSPT1, ni les racines complexes des polynômes réels. Les polynômes réels sont pour vus seulement comme des fonctions polynomiales et l'ensemble  $\mathbb{R}[X]$  sera introduit seulement en deuxième année.
- [2] À l'aide du produit de Cauchy. L'idée est de réviser les manipulations d'indices dans les calculs de sommes.
- [3] Équivalents de  $P(x)$  lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$  ou  $x \rightarrow 0$  pour  $P$  une fonction polynomiale, et équivalents de  $(1+x)^\alpha - 1$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $\exp(x) - 1$ ,  $\cos(x) - 1$ ,  $\sin(x)$  et  $\tan(x)$  lorsque  $x \rightarrow 0$  (à l'aide d'un taux d'accroissement en 0, sauf pour  $\cos$  où on se ramène à  $\sin$  par des formules de trigo).