Programme de khôlles n° 23

semaine du 1er au 6 avril

Mots-clefs

- **Continuité** : définition de la continuité en un point, caractérisation de la continuité à l'aide des limites à gauche et à droite, définition de la continuité sur une partie de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathscr{C}^0(I)$, opérations sur les fonctions continues (somme, produit, quotient, composition), prolongement par continuité, approximation d'une solution d'une équation, algorithme de dichotomie, théorème des valeurs intermédiaires, image d'un intervalle par une fonction continue, courbe représentative d'une fonction continue, théorème de la bijection continue, théorème des bornes, image d'un segment par une fonction continue
- **L'espace vectoriel** $\mathbb{K}^n$: multiplication par un scalaire, addition de vecteurs, propriétés des opérations de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, combinaisons linéaires, familles de vecteurs linéairement dépendants, définition d'un sous-espace vectoriel, toute combinaison linéaire de vecteurs d'un sous-espace vectoriel appartient à ce sous-espace vectoriel, droites vectorielles, plans vectoriels, hyperplans, intersection de sous-espaces vectoriels, sous-espace vectoriel engendré, notation $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$, propriétés des sous-espaces vectoriels engendrés. $\boxed{1}$
- **Dérivabilité** : définition de la dérivabilité et du nombre dérivée en un point, taux d'accroissement, dérivabilité à gauche et à droite, dérivabilité des fonctions usuelles, dérivabilité et continuité, tangente, développements limités d'ordre 1, opérations sur les dérivées (somme, produit, composition, quotient), dérivée d'une bijection réciproque, points critiques et extrema locaux, théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, principe de Lagrange, dérivées d'ordre supérieure, les ensembles $\mathscr{C}^n(I)$ et $\mathscr{C}^\infty(I)$. $\boxed{2}$

Savoir-faire

- Étudier le prolongement par continuité d'une fonction en un point du bord de son ensemble de définition.
- Déterminer une approximation de la solution d'une équation à l'aide d'un algorithme de dichotomie.
- Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires ou le théorème des bornes.
- Étudier la continuité d'une fonction implicite.
- Montrer qu'une partie de $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel.
- Déterminer une représentation cartésienne ou paramétrique d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
- Montrer qu'un vecteur de $\mathbb{K}^n$ est combinaison linéaire d'autres vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
- Montrer qu'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ est engendré par une famille de vecteurs.

Exemples de questions de cours

- Montrer que si $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$ avec $f(a)f(b) \leqslant 0$ alors $\exists c \in [a,b],\ f(c) = 0$.
- Écrire une fonction en Python qui calcule l'approximation de la solution d'une équation à l'aide d'un algorithme de dichotomie. $\boxed{3}$
- Rappeler le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème de la bijection continue et le théorème des bornes.
- Rappeler la définition d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ et montrer que toute combinaison linéaire de vecteurs d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ appartient à ce sous-espace.
- Rappeler la définition d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ et montrer que $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{k=1}^n a_k x_k = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.
- Rappeler la définition d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ et montrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
- Rappeler la définition de $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ et montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
- Montrer que $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ contenant $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}$.
- Montrer que si $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ alors $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$.
- Rappeler la formule de dérivée d'un produit et la démontrer à l'aide de développements limités d'ordre 1.
- Rappeler la formule de dérivée d'une composée et la démontrer à l'aide de développements limités d'ordre 1.

Notes aux khôlleurs

$\boxed{1}$ Pas encore de familles libres ou génératrices (ni de bases ou de dimensions).

$\boxed{2}$ Pas d'exercices sur la dérivabilité cette semaine.

$\boxed{3}$ On peut demander deux fonctions : une première qui calcule le n-ième terme d'une suite qui converge vers la solution puis une deuxième qui calcule une approximation étant donnée une précision.