# Programme de khôlles n° 24

## semaine du 8 au 13 avril

### Mots-clefs

— **L'espace vectoriel** $\mathbb{K}^n$ : multiplication par un scalaire, addition de vecteurs, propriétés des opérations de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, combinaisons linéaires, familles de vecteurs linéairement dépendants, définition d'un sous-espace vectoriel, toute combinaison linéaire de vecteurs d'un sous-espace vectoriel appartient à ce sous-espace vectoriel, droites vectorielles, plans vectoriels, hyperplans, intersection de sous-espaces vectoriels, sous-espace vectoriel engendré, notation $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$, propriétés des sous-espaces vectoriels engendrés.

— **Dérivation** : définition de la dérivabilité et du nombre dérivée en un point, taux d'accroissement, dérivabilité à gauche et à droite, dérivabilité des fonctions usuelles, dérivabilité et continuité, tangente, développements limités d'ordre 1, opérations sur les dérivées (somme, produit, composition, quotient), dérivée d'une bijection réciproque, points critiques et extrema locaux, théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, principe de Lagrange, dérivées d'ordre supérieur, les ensembles $\mathscr{C}^n(I)$ et $\mathscr{C}^\infty(I)$, opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^n(I)$ et $\mathscr{C}^\infty(I)$ (somme, produit, composition, quotient).

— **familles de vecteurs de** $\mathbb{K}^n$ : familles génératrices d'un sous-espace vectoriel, existence de l'écriture en combinaison linéaire des vecteurs d'une famille génératrice, ajout de vecteurs à une famille génératrice, familles libres, familles liées, unicité de l'écriture en combinaison linéaire des vecteurs d'une famille libre, retrait de vecteurs d'une famille libre, bases d'un sous-espace vectoriel, la base canonique de $\mathbb{K}^n$, existence et unicité de l'écriture en combinaison linéaire des vecteurs d'une base, existence de base, dimension d'un sous-espace vectoriel, famille génératrice minimale, famille libre maximale, dimensions de sous-espaces vectoriels inclus, rang d'une famille de vecteurs, rang d'une famille libre, rang d'une famille génératrice, matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base, notation $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$. $\boxed{1}$

### Savoir-faire

— Montrer qu'une partie de $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel.
— Déterminer une représentation cartésienne ou paramétrique d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
— Montrer qu'un vecteur de $\mathbb{K}^n$ est combinaison linéaire d'autres vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
— Montrer qu'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ est engendré par une famille de vecteurs.
— Calculer des dérivées.
— Reconnaître un taux d'accroissement pour calculer une limite.
— Utiliser le théorème de Rolle ou des accroissements finis.
— Utiliser le théorème des accroissements finis pour prouver des inégalités. $\boxed{2}$
— Calculer des dérivées d'ordre supérieur.

### Exemples de questions de cours

— Rappeler la formule de dérivée d'un produit et la démontrer à l'aide de développements limités d'ordre 1.
— Rappeler la formule de dérivée d'une composée et la démontrer à l'aide de développements limités d'ordre 1.
— Montrer que si $f$ est dérivable sur $]a, b[$ et admet un extremum local en $c \in ]a, b[$ alors $f'(c) = 0$.
— Rappeler et démontrer le théorème de Rolle.
— Rappeler et démontrer le théorème des accroissements finis.
— Montrer que si $f$ est dérivable sur un intervalle $I$ et si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$ alors $f$ est croissante sur $I$.
— Rappeler la définition d'une famille génératrice de $F$ et montrer que tout vecteur de $F$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de
— Montrer que si $F_1$ et $F_2$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ tels que $F_1 \subset F_2$ alors $\dim(F_1) \leqslant \dim(F_2)$.
— Rappeler les définitions de famille libre, famille génératrice, base, dimension et rang d'une famille de vecteurs.
— Déterminer la dimension de $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{k=1}^n a_k x_k = 0\}$ où $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.
— Montrer que si $F_1$ et $F_2$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ de même dimension alors $F_1 \subset F_2 \iff F_2 \subset F_1$.
— Rappeler et démontrer qu'une famille de $p$ vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est libre si et seulement si son rang est égal à $p$.
— Rappeler et démontrer qu'une famille de vecteurs d'un sous-espace vectoriel $F$ de $\mathbb{K}^n$ est génératrice de $F$ si et seulement si son rang est égal à $\dim(F)$.

### Notes aux khôlleurs

$\boxed{1}$ Pas d'exercices sur les familles libres ou génératrices (ni les bases ou les dimensions) cette semaine.
$\boxed{2}$ L'inégalité des accroissements finis n'est pas au programme de BCPST.