Programme de khôlles n° 25

semaine du 17 au 22 avril

Mots-clefs

- **Probabilités sur un univers fini** : expérience aléatoire, univers Ω, événement, événement certain, événement impossible, événements incompatibles, système complet d'événements, probabilité sur Ω, propriétés d'une probabilité, espace probabilisé fini, construction d'une probabilité, probabilité uniforme, définition de la probabilité conditionnelle, propriétés des probabilités conditionnelles, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes, événements indépendants, événements mutuellement indépendants, propriétés de l'indépendance.
- **Continuité** : continuité et discontinuité en un point, continuité à gauche et à droite, prolongement par continuité, l'ensemble $\mathscr{C}^0(I)$ des fonctions continues sur un intervalle, continuité des fonctions usuelles, opérations avec des fonctions de classe $\mathscr{C}^0$, algorithme de dichotomie, approximation d'une solution d'une équation, théorème des valeurs intermédiaires, image d'un intervalle par une fonction continue, courbe représentative d'une fonction continue, théorème de la bijection continue, théorème des bornes atteintes, image d'un segment par une fonction continue.
- **L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$** : multiplication d'un vecteur par un scalaire, addition de deux vecteurs, propriétés des opérations avec des vecteurs, combinaisons linéaires, vecteurs linéairement dépendants, vecteurs linéairement indépendants. $\boxed{1}$

Savoir-faire

- Déterminer un espace probabilisé fini permettant de modéliser une expérience aléatoire.
- Calculer des probabilités à l'aide du dénombrement.
- Calculer la probabilité d'une union (de deux événements ou d'un nombre quelconque d'événements deux à deux incompatibles).
- Calculer la probabilité d'une intersection (dans le cas d'événements mutuellement indépendants ou à l'aide de la formule des probabilités composées).
- Calculer une probabilité à l'aide de la formule des probabilités totales.
- Calculer la probabilité d'une cause sachant la conséquence (à l'aide de la formule de Bayes).
- Étudier la continuité en un point à l'aide de limites.
- Montrer qu'une fonction est prolongeable par continuité en un point à l'aide de limites.
- Déterminer des approximations d'une solution d'une équation à l'aide d'un algorithme de dichotomie.
- Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.
- Utiliser le théorème de la bijection continue.
- Utiliser le théorème des bornes.
- Étudier la continuité de fonctions implicites.
- Manipuler des vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
- Déterminer si des vecteurs de $\mathbb{K}^n$ sont linéairement dépendants ou non (à l'aide d'un système linéaire).

Exemples de questions de cours

- Rappeler et démontrer la formule des probabilités composées, ou des probabilités totales, ou de Bayes.
- Montrer que si une fonction réelle f est continue en $a \in \mathbb{R}$ et que $f(a) > 0$ alors $f > 0$ au voisinage de a.
- Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$ telle que $f(a) \leqslant 0 \leqslant f(b)$. Rappeler la définition des deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ de l'algorithme de dichotomie puis montrer que $\forall n \geqslant 0,\ b_n - a_n = (b-a)/2^n$, ou que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes en supposant que $\forall n \geqslant 0,\ b_n - a_n = (b-a)/2^n$, ou que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers une solution de $f(x) = 0$ en supposant qu'elles sont adjacentes.
- Écrire une ou plusieurs fonctions Python permettant de calculer des approximations d'une solution d'une équation donnée, éventuellement à une précision donnée.
- Rappeler les théorèmes des valeurs intermédiaires, de la bijection continue, et des bornes atteintes.
- Montrer que des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}$ de $\mathbb{K}^n$ sont linéairement dépendants si et seulement si l'un d'entre eux peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres.

Notes aux khôlleurs

- $\boxed{1}$ La définition générale d'un espace vectoriel abstrait n'est pas au programme de BCPST1. On décrit seulement la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ (et seulement cet exemple) afin de réviser le calcul matriciel et de préparer les esprits à la notion générale d'espace vectoriel présentée en BCPST2. Pas de sous-espaces vectoriels cette semaine.