Programme de khôlles n° 25

semaine du 15 au 20 avril

Mots-clefs

- **Dérivation** : définition de la dérivabilité et du nombre dérivée en un point, taux d'accroissement, dérivabilité à gauche et à droite, dérivabilité des fonctions usuelles, dérivabilité et continuité, tangente, développements limités d'ordre 1, opérations sur les dérivées (somme, produit, composition, quotient), dérivée d'une bijection réciproque, points critiques et extrema locaux, théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, principe de Lagrange, dérivées d'ordre supérieur, les ensembles $\mathscr{C}^n(I)$ et $\mathscr{C}^\infty(I)$, opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^n(I)$ et $\mathscr{C}^\infty(I)$ (somme, produit, composition, quotient).
- **Familles de vecteurs de $\mathbb{K}^n$** : familles génératrices d'un sous-espace vectoriel, existence de l'écriture en combinaison linéaire des vecteurs d'une famille génératrice, ajout de vecteurs à une famille génératrice, familles libres, familles liées, unicité de l'écriture en combinaison linéaire des vecteurs d'une famille libre, retrait de vecteurs d'une famille libre, bases d'un sous-espace vectoriel, la base canonique de $\mathbb{K}^n$, existence et unicité de l'écriture en combinaison linéaire des vecteurs d'une base, existence de base, dimension d'un sous-espace vectoriel, famille génératrice minimale, famille libre maximale, dimensions de sous-espaces vectoriels inclus, rang d'une famille de vecteurs, rang d'une famille libre, rang d'une famille génératrice, matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base, notation $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$.
- **Développements limités** : manipulations des o, définition d'un $\mathrm{DL}_n(a)$, unicité du $\mathrm{DL}_n(a)$, développements limités d'ordre inférieur, continuité et $\mathrm{DL}_0(a)$, dérivabilité et $\mathrm{DL}_1(a)$, parité et $\mathrm{DL}_n(0)$, équivalent et $\mathrm{DL}_n(a)$, formule de Taylor-Young, $\mathrm{DL}_n(0)$ usuels ($x \mapsto (1+x)^\alpha$, exp, ln, cos, sin). $\boxed{1}$

Savoir-faire

- Calculer des dérivées.
- Reconnaître un taux d'accroissement pour calculer une limite.
- Utiliser le théorème de Rolle ou des accroissements finis.
- Utiliser le théorème des accroissements finis pour prouver des inégalités. $\boxed{2}$
- Calculer des dérivées d'ordre supérieur.
- Montrer qu'une famille est génératrice d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
- Déterminer une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ (dans le cas d'une représentation paramétrique ou d'une représentation cartésienne).
- Montrer qu'une famille est libre (à l'aide de la définition ou du rang).
- Montrer qu'une famille est une base d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
- Déterminer une base et la dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
- Calculer les coordonnées d'un vecteur dans une base.

Exemples de questions de cours

- Montrer que si f est dérivable sur $]a,b[$ et admet un extremum local en $c \in]a,b[$ alors $f'(c) = 0$.
- Rappeler et démontrer le théorème de Rolle.
- Rappeler et démontrer le théorème des accroissements finis.
- Montrer que si f est dérivable sur un intervalle I et si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$ alors f est croissante sur I.
- Rappeler la définition d'une famille génératrice de F et montrer que tout vecteur de F peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.
- Montrer que si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ tels que $F_1 \subset F_2$ alors $\dim(F_1) \leqslant \dim(F_2)$.
- Rappeler les définitions de famille libre, famille génératrice, base, dimension et rang d'une famille de vecteurs.
- Déterminer la dimension de $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \,|\, \sum_{k=1}^n a_k x_k = 0\}$ où $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$.
- Montrer que si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ de même dimension alors $F_1 \subset F_2 \iff F_2 \subset F_1$.
- Rappeler et démontrer qu'une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est libre si et seulement si son rang est égal à p.
- Rappeler et démontrer qu'une famille de vecteurs d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$ est génératrice de F si et seulement si son rang est égal à $\dim(F)$.
- Rappeler la formule de Taylor-Young et démontrer l'un des développements limités usuels ($x \mapsto (1+x)^\alpha$, exp, ln, cos, sin).

Notes aux khôlleurs

$\boxed{1}$ Pas d'exercices sur les développements limités cette semaine.

$\boxed{2}$ L'inégalité des accroissements finis n'est pas au programme de BCPST.