Programme de khôlles n° 26

semaine du 9 au 13 mai

Mots-clefs

— **Continuité** : continuité et discontinuité en un point, continuité à gauche et à droite, prolongement par continuité, l'ensemble $\mathscr{C}^0(I)$ des fonctions continues sur un intervalle, continuité des fonctions usuelles, opérations avec des fonctions de classe $\mathscr{C}^0$, algorithme de dichotomie, approximation d'une solution d'une équation, théorème des valeurs intermédiaires, image d'un intervalle par une fonction continue, courbe représentative d'une fonction continue, théorème de la bijection continue, théorème des bornes atteintes, image d'un segment par une fonction continue.

— **L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$** : multiplication d'un vecteur par un scalaire, addition de deux vecteurs, propriétés des opérations avec des vecteurs, combinaisons linéaires, vecteurs linéairement dépendants, vecteurs linéairement indépendants, définition d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, propriétés des opérations dans un sous-espace vectoriel, hyperplans, intersection de sous-espaces vectoriels, sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs, notation $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$, propriétés des sous-espaces vectoriels engendrés. $\boxed{1}$

— **Dérivabilité** : taux d'accroissement, nombre dérivée, dérivabilité à gauche et à droite, tangente, développements limités d'ordre 1, opérations sur les nombres dérivés (somme, produit). $\boxed{2}$

Savoir-faire

— Étudier la continuité en un point à l'aide de limites.
— Montrer qu'une fonction est prolongeable par continuité en un point à l'aide de limites.
— Déterminer des approximations d'une solution d'une équation à l'aide d'un algorithme de dichotomie.
— Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème de la bijection continue, ou le théorème des bornes.
— Étudier la continuité de fonctions implicites.
— Manipuler des vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
— Déterminer si des vecteurs de $\mathbb{K}^n$ sont linéairement dépendants ou non (à l'aide d'un système linéaire).
— Montrer qu'une partie de $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel.
— Étudier un sous-espace vectoriel engendré.

Exemples de questions de cours

— Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$ telle que $f(a) \leqslant 0 \leqslant f(b)$. Rappeler la définition des deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ de l'algorithme de dichotomie puis montrer que $\forall n \geqslant 0,\ b_n - a_n = (b-a)/2^n$, ou que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes en supposant que $\forall n \geqslant 0,\ b_n - a_n = (b-a)/2^n$, ou que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers une solution de $f(x) = 0$ en supposant qu'elles sont adjacentes.
— Écrire une ou plusieurs fonctions Python permettant de calculer des approximations d'une solution d'une équation donnée, éventuellement à une précision donnée.
— Rappeler les théorèmes des valeurs intermédiaires, de la bijection continue, et des bornes atteintes.
— Montrer que des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}$ de $\mathbb{K}^n$ sont linéairement dépendants si et seulement si l'un d'entre eux peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres.
— Rappeler la définition d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ et montrer que tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ est stable par combinaison linéaire.
— Montrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
— Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$. Montrer que $\mathscr{H} = \{\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
— Rappeler la définition de $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ et montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, qui est même le plus petit contenant les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, …, et $\overrightarrow{u_p}$
— Soit $\overrightarrow{w} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$. Montrer que $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{w}) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$.
— Montrer qu'une fonction est dérivable en a si et seulement si elle admet un $\mathrm{DL}_1(a)$.
— Montrer que si f et g sont dérivables en a alors $f+g$ ou $f \times g$ aussi à l'aide d'un $\mathrm{DL}_1(a)$.

Notes aux khôlleurs

— $\boxed{1}$ La définition générale d'un espace vectoriel abstrait n'est pas au programme de BCPST1. On décrit seulement la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ (et seulement cet exemple) afin de réviser le calcul matriciel et de préparer les esprits à la notion générale d'espace vectoriel présentée en BCPST2. Les familles libres, génératrices ainsi que les bases et la dimension n'ont pas encore été vues.
— $\boxed{2}$ Pas d'exercices sur la dérivabilité cette semaine.