Programme de khôlles n° 27
semaine du 15 au 17 mai

Mots-clefs

— **L'espace vectoriel** $\mathbb{K}^n$: multiplication d'un vecteur par un scalaire, addition de deux vecteurs, propriétés des opérations avec des vecteurs, combinaisons linéaires, vecteurs linéairement dépendants, vecteurs linéairement indépendants, définition d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, propriétés des opérations dans un sous-espace vectoriel, hyperplans, intersection de sous-espaces vectoriels, sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs, notation $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$, propriétés des sous-espaces vectoriels engendrés. $\boxed{1}$

— **Dérivabilité** : taux d'accroissement, nombre dérivée, dérivabilité à gauche et à droite, tangente, développements limités d'ordre 1, opérations sur les nombres dérivés (somme, produit, quotient, composée), fonctions dérivées, notations f' et $\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x$, dérivabilité des fonctions usuelles, opérations avec des fonctions dérivables, théorème de la bijection dérivable, théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, principe de Lagrange, dérivées d'ordre supérieur, les ensembles $\mathscr{C}^n(I)$ et $\mathscr{C}^\infty(I)$, opérations avec des fonct. de classe $\mathscr{C}^n$ et $\mathscr{C}^\infty$. $\boxed{2}$

— **Familles de vecteurs de** $\mathbb{K}^n$: famille génératrice d'un sous-espace vectoriel, ajout de vecteurs à une famille génératrice, famille libre, unicité de l'écriture en combinaison linéaire des vecteurs d'une famille libre, retrait de vecteurs d'une famille libre, base d'un sous-espace vectoriel, base canonique de $\mathbb{K}^n$. $\boxed{3}$

Savoir-faire

— Déterminer si des vecteurs de $\mathbb{K}^n$ sont linéairement dépendants ou non (à l'aide d'un système linéaire).
— Montrer qu'une partie de $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel.
— Étudier la dérivabilité d'une fonction réelle (à l'aide des fonctions usuelles ou de taux d'accroissement).
— Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction dérivable.
— Calculer une limite à l'aide d'un taux d'accroissement.
— Appliquer le théorème de Rolle ou le théorème des accroissements finis. $\boxed{2}$
— Calculer des dérivées d'ordre supérieur.
— Montrer qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est génératrice d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. $\boxed{3}$
— Montrer qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est libre. $\boxed{3}$

Exemples de questions de cours

— Rappeler la définition d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ et montrer que tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ est stable par combinaison linéaire.
— Montrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
— Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$. Montrer que $\mathscr{H} = \{\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
— Rappeler la définition de $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ et montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, qui est même le plus petit contenant les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, …, et $\overrightarrow{u_p}$
— Soit $\overrightarrow{w} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$. Montrer que $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{w}) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$.
— Montrer qu'une fonction est dérivable en a si et seulement si elle admet un $\mathrm{DL}_1(a)$.
— Montrer que si f et g sont dérivables en a alors $f + g$ ou $f \times g$ aussi à l'aide d'un $\mathrm{DL}_1(a)$.
— Montrer que si f est dérivable en a et g en $b = f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a à l'aide d'un $\mathrm{DL}_1(a)$.
— Rappeler et démontrer le théorème de Rolle.
— Rappeler et démontrer le théorème des accroissements finis.
— Montrer qu'une fonction f dérivable sur un intervalle I est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) \geqslant 0$.
— Rappeler la définition d'une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$ et montrer qu'une famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est génératrice de F si et seulement si $\overrightarrow{u_i} \in F$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et chaque vecteur de F peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, … et $\overrightarrow{u_p}$.
— Rappeler la définition d'une famille libre et montrer que chaque vecteur de $\mathbb{K}^n$ peut s'écrire d'au plus une manière comme une combinaison linéaire des vecteurs d'une famille libre.

Notes aux khôlleurs

— $\boxed{1}$ La définition générale d'un espace vectoriel abstrait n'est pas au programme de BCPST1. On décrit seulement la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ (et seulement cet exemple) afin de réviser le calcul matriciel et de préparer les esprits à la notion générale d'espace vectoriel présentée en BCPST2.
— $\boxed{2}$ L'inégalité des accroissements finis n'est pas au programme de BCPST.
— $\boxed{3}$ Les coordonnées dans une base, la dimension d'un sous-espace vectoriel, le rang d'une famille de vecteurs et l'extraction d'une base d'une famille génératrice n'ont pas encore été traités.