Programme de khôlles n° 28
semaine du 30 mai au 3 juin

Mots-clefs

- **Dérivabilité** : taux d'accroissement, nombre dérivée, dérivabilité à gauche et à droite, tangente, développements limités d'ordre 1, opérations sur les nombres dérivés (somme, produit, quotient, composée), fonctions dérivées, notations f' et $\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x$, dérivabilité des fonctions usuelles, opérations avec des fonctions dérivables, théorème de la bijection dérivable, théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, principe de Lagrange, dérivées d'ordre supérieur, les ensembles $\mathscr{C}^n(I)$ et $\mathscr{C}^\infty(I)$, opérations avec des fonct. de classe $\mathscr{C}^n$ et $\mathscr{C}^\infty$. $\boxed{1}$
- **Familles de vecteurs de** $\mathbb{K}^n$: famille génératrice d'un sous-espace vectoriel, ajout de vecteurs à une famille génératrice, famille libre, unicité de l'écriture en combinaison linéaire des vecteurs d'une famille libre, retrait de vecteurs d'une famille libre, base d'un sous-espace vectoriel, base canonique de $\mathbb{K}^n$, coordonnées dans une base, dimension d'un sous-espace vectoriel, dimension d'un hyperplan, famille génératrice minimale, famille libre maximale, rang d'une famille de vecteurs, matrice des coordonnées d'une famille de vecteurs dans une base, notation $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$. $\boxed{2}$

Savoir-faire

- Étudier la dérivabilité d'une fonction réelle (à l'aide des fonctions usuelles ou de taux d'accroissement).
- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction dérivable.
- Calculer une limite à l'aide d'un taux d'accroissement.
- Appliquer le théorème de Rolle ou le théorème des accroissements finis. $\boxed{1}$
- Calculer des dérivées d'ordre supérieur.
- Montrer qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est génératrice d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
- Montrer qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est libre.
- Déterminer une base et la dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. $\boxed{2}$
- Extraire une base d'une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. $\boxed{2}$
- Calculer les coordonnées d'un vecteur dans une base.

Exemples de questions de cours

- Montrer que si f est dérivable en a et g en $b = f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a à l'aide d'un $\mathrm{DL}_1(a)$.
- Rappeler et démontrer le théorème de Rolle.
- Rappeler et démontrer le théorème des accroissements finis.
- Montrer qu'une fonction f dérivable sur un intervalle I est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) \geqslant 0$.
- Rappeler la définition d'une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$ et montrer qu'une famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est génératrice de F si et seulement si $\overrightarrow{u_i} \in F$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et chaque vecteur de F peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, … et $\overrightarrow{u_p}$.
- Rappeler la définition d'une famille libre et montrer que chaque vecteur de $\mathbb{K}^n$ peut s'écrire d'au plus une manière comme une combinaison linéaire des vecteurs d'une famille libre.
- Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$. Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel $\mathscr{H} = \{\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\}$.
- Montrer qu'une famille est libre si et seulement si son rang est égal à son nombre de vecteurs.
- Montrer qu'une famille est génératrice d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$ si et seulement si son rang est égal à $\dim(F)$.

Notes aux khôlleurs

- $\boxed{1}$ L'inégalité des accroissements finis n'est pas au programme de BCPST.
- $\boxed{2}$ L'extraction d'une base d'une famille génératrice n'a pas encore été traitée en exercice, mais on peut déjà le proposer en accompagnant la méthode.