

# Programme de khôlles n° 29

semaine du 12 mai au 17 juin

## Mots-clefs

- **Familles de vecteurs de  $\mathbb{K}^n$**  : famille génératrice d'un sous-espace vectoriel, ajout de vecteurs à une famille génératrice, famille libre, unicité de l'écriture en combinaison linéaire des vecteurs d'une famille libre, retrait de vecteurs d'une famille libre, base d'un sous-espace vectoriel, base canonique de  $\mathbb{K}^n$ , coordonnées dans une base, dimension d'un sous-espace vectoriel, dimension d'un hyperplan, famille génératrice minimale, famille libre maximale, rang d'une famille de vecteurs, matrice des coordonnées d'une famille de vecteurs dans une base, notation  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ .
- **Développements limités** : définition d'un développement limité, notation et manipulation des  $o_{x \rightarrow 0}(x^n)$ , unicité du  $\text{DL}_n(a)$ , développements limités d'ordre inférieur, calcul d'équivalents et de limites à l'aide de développements limités,  $\text{DL}_n(0)$  de fonctions paires ou impaires,  $\text{DL}_0(a)$  de fonctions continues ou prolongeables par continuité en  $a$ ,  $\text{DL}_1(a)$  de fonctions dérivables en  $a$ , formule de Taylor-Young, développements limités des fonctions usuelles, opérations avec des développements limités (somme, produit, composée, quotient), primitivation de développements limités.

## Savoir-faire

- Montrer qu'une famille de vecteurs de  $\mathbb{K}^n$  est génératrice d'un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$ .
- Montrer qu'une famille de vecteurs de  $\mathbb{K}^n$  est libre.
- Déterminer une base et la dimension d'un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$ .
- Extraire une base d'une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$ .
- Calculer les coordonnées d'un vecteur dans une base.
- Calculer des développements limités (à l'aide des DL usuels ou à l'aide de la formule de Taylor-Young).
- Calculer une limite à l'aide d'un développement limité.
- Déterminer un équivalent à l'aide d'un développement limité.
- Étudier une tangente d'une courbe représentative à l'aide d'un développement limité.

## Exemples de questions de cours

- Soit  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$ . Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel  $\mathcal{H} = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0\}$ .
- Montrer qu'une famille est libre si et seulement si son rang est égal à son nombre de vecteurs.
- Montrer qu'une famille est génératrice d'un sous-espace vectoriel  $F$  de  $\mathbb{K}^n$  si et seulement si son rang est égal à  $\dim(F)$ .
- Montrer que si une fonction  $f$  admet un  $\text{DL}_n(a)$  alors ce  $\text{DL}_n(a)$  est unique.
- Montrer que si une fonction  $f$  admet un  $\text{DL}_n(a)$  alors  $f$  admet un  $\text{DL}_m(a)$  pour tout ordre  $m \leq n$ .
- Montrer que si une fonction  $f$  admet un  $\text{DL}_n(a)$  non nul alors  $f$  est équivalente au voisinage de  $a$  au terme non nul de plus petit degré de son  $\text{DL}_n(a)$ .
- Montrer que si une fonction  $f$  est paire (resp. impaire) et admet un  $\text{DL}_n(0)$  alors tous les termes de degré impair (resp. pair) de son  $\text{DL}_n(0)$  sont nuls.
- Rappeler la formule de Taylor-Young et démontrer le développement limité de  $\exp$ ,  $\ln$ ,  $\cos$  ou  $\sin$ .
- Calculer le  $\text{DL}_{2n+2}(0)$  de  $\arctan$  (par primitivation).
- Calculer le  $\text{DL}_7(0)$  de  $\tan$  (par primitivation successive).

## Notes aux khôlleurs

- R.A.S.