Programme de khôlles n$^{\text{o}}$ 30
semaine du 19 mai au 24 juin

Mots-clefs

- **Familles de vecteurs de** $\mathbb{K}^n$: famille génératrice d'un sous-espace vectoriel, ajout de vecteurs à une famille génératrice, famille libre, unicité de l'écriture en combinaison linéaire des vecteurs d'une famille libre, retrait de vecteurs d'une famille libre, base d'un sous-espace vectoriel, base canonique de $\mathbb{K}^n$, coordonnées dans une base, dimension d'un sous-espace vectoriel, dimension d'un hyperplan, famille génératrice minimale, famille libre maximale, rang d'une famille de vecteurs, matrice des coordonnées d'une famille de vecteurs dans une base, notation $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$.
- **Développements limités** : définition d'un développement limité, notation et manipulation des $o_{x\to 0}(x^n)$, unicité du $\mathrm{DL}_n(a)$, développements limités d'ordre inférieur, calcul d'équivalents et de limites à l'aide de développements limités, $\mathrm{DL}_n(0)$ de fonctions paires ou impaires, $\mathrm{DL}_0(a)$ de fonctions continues ou prolongeables par continuité en a, $\mathrm{DL}_1(a)$ de fonctions dérivables en a, formule de Taylor-Young, développements limités des fonctions usuelles, opérations avec des développements limités (somme, produit, composée, quotient), primitivation de développements limités.
- **Variables aléatoires sur un univers fini** : définition d'une variable aléatoire, loi de probabilité, construction d'une variable aléatoire sur un univers fini, fonction de répartition, loi de probabilité d'une composée, espérance, propriétés de l'espérance, formule de transfert, moments d'ordre k, variance, formule de Koenig-Huygens, propriétés de la variance, variables aléatoires centrées réduites, couple de variables aléatoires indépendantes, famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes, lemme des coalitions, propriétés de l'indépendance, lois de probabilité usuelles (loi certaine, loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale). $\boxed{1}$

Savoir-faire

- Montrer qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est génératrice d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
- Montrer qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est libre.
- Déterminer une base et la dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
- Extraire une base d'une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
- Calculer les coordonnées d'un vecteur dans une base.
- Calculer des développements limités (à l'aide des DL usuels ou à l'aide de la formule de Taylor-Young).
- Calculer une limite à l'aide d'un développement limité.
- Déterminer un équivalent à l'aide d'un développement limité.
- Étudier une tangente d'une courbe représentative à l'aide d'un développement limité.
- Déterminer une loi de probabilité.
- Calculer une espérance et une variance (à l'aide de la loi de probabilité ou du théorème de transfert).

Exemples de questions de cours

- Montrer que si une fonction f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ alors ce $\mathrm{DL}_n(a)$ est unique.
- Montrer que si une fonction f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ alors f admet un $\mathrm{DL}_m(a)$ pour tout ordre $m \leqslant n$.
- Montrer que si une fonction f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ non nul alors f est équivalente au voisinage de a au terme non nul de plus petit degré de son $\mathrm{DL}_n(a)$.
- Montrer que si une fonction f est paire (resp. impaire) et admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors tous les termes de degré impair (resp. pair) de son $\mathrm{DL}_n(0)$ sont nuls.
- Rappeler la formule de Taylor-Young et démontrer le développement limité de exp, ln, cos ou sin.
- Calculer le $\mathrm{DL}_{2n+2}(0)$ de arctan (par primitivation).
- Calculer le $\mathrm{DL}_7(0)$ de tan (par primitivation successive).
- Rappeler et démontrer la formule de Koenig-Huygens
- Montrer que l'espérance du produit de deux var. aléat. indépendantes est égal au produit des espérances.
- Montrer que la variance de la somme de deux var. aléat. indépendantes est égale à la somme des variances.
- Rappeler la loi de probabilité uniforme et calculer son espérance.
- Rappeler la loi binomiale et calculer son espérance.

Notes aux khôlleurs

- $\boxed{1}$ La loi hypergéométrique n'est plus au programme de BCPST. Les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev sont désormais traitées en BCPST2.