Programme de khôlles n° 7
semaine du 9 au 14 novembre

Mots-clefs

- **Sommes et produits** : le symbole $\sum$, somme des premiers entiers, somme des premiers carrés, somme des premiers cubes, somme des termes d'une suite arithmétique, somme des termes d'une suite géométrique, propriétés des opérations avec le symbole $\sum$ (associativité, linéarité, décalage d'indice, inversion de l'ordre de sommation, somme télescopique, séparation des indices pairs et impairs, inégalité triangulaire), sommes doubles (sur un rectangle ou un triangle d'indices), le symbole $\prod$, factorielle, propriétés des opérations avec le symbole $\prod$ (associativité, multiplicativité, décalage d'indice, inversion de l'ordre du produit, produit télescopique, séparation des indices pairs et impairs), produits doubles (sur un rectangle ou un triangle d'indices), coefficients binomiaux, propriétés des coefficients binomiaux (symétrie, formule du pion, formule de Pascal), triangle de Pascal, formule du binôme de Newton.
- **Applications** : ensembles de départ et d'arrivée, fonctions, applications, images, antécédents, l'ensemble F^E, l'application identité Id_E, applications caractéristiques d'une partie, image directe, ensemble des antécédents, restrictions, prolongements, composition, propriétés de la composition (non commutativité, associativité, élément neutre, inverse, unicité de l'application inverse), injections, surjections, bijections, bijections réciproques, les applications inversibles sont les bijections, composition de bijections, fonctions réelles strictement monotones, image directe d'un intervalle par une fonction continue, théorème de la bijection, courbe représentative d'une bijection réciproque.
- **Dénombrement** : ensembles finis, cardinal, cardinal et bijections, cardinal et injections (principe des tiroirs), cardinal et surjections, cardinal d'une partie, cardinal d'une union de parties deux à deux disjointes, cardinal d'un complémentaire, cardinal d'une union quelconque (de deux parties), cardinal d'un produit cartésien, cardinal d'un ensemble d'applications, cardinal d'un ensemble de parties, p-listes avec répétition, p-listes sans répétition, nombre d'injections, permutations, nombre de bijections, p-combinaisons. $\boxed{1}$

Savoir-faire

- Connaître et utiliser les sommes usuelles (sommes des termes d'une suite arithmétique ou géométrique, formule du binôme de Newton, somme des premiers entiers, sommes des premiers carrés).
- Connaître et utiliser les factorielles et les coefficients binomiaux.
- Manipuler et calculer des sommes (linéarité, décalage d'indice, inversion de l'ordre de sommation, sommes télescopiques, séparation des indices pairs et impairs) et des produits (multiplicativité, etc.).
- Manipuler et calculer des sommes doubles et des produits doubles (sur un rectangle ou un triangle d'indices).
- Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité d'une application (à l'aide d'une équation ou des définitions).
- Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité d'une fonction réelle d'une variable (à l'aide du tableau des variations et du théorème de la bijection).
- Déterminer la bijection réciproque (à l'aide d'une équation ou en tant qu'application inverse).
- Écrire une application comme une composée de plusieurs applications.

Exemples de questions de cours

- Montrer que la composition d'applications est associative.
- Rappeler la définition d'une application inversible et démontrer l'unicité de l'application inverse.
- Rappeler les définitions de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité et de la bijection réciproque.
- Montrer que si une application $f : E \to F$ est bijective alors $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.
- Montrer que si une application est inversible alors elle est bijective.
- Montrer que la composée de deux bijections est bijective en rappelant l'expression de sa bijection réciproque.
- Rappeler le théorème de la bijection et montrer qu'une fonction réelle strictement monotone est injective.
- Rappeler et démontrer l'identité de Vandermonde : $\sum_{\ell=0}^{m+n} \binom{m}{\ell}\binom{n}{k-\ell} = \binom{m+n}{k}$ pour tout $k \in [\![0, m+n]\!]$. $\boxed{2}$
- Rappeler et démontrer la formule de Poincaré : $\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B)$.
- Rappeler et démontrer le cardinal de l'ensemble F^E où E et F sont deux ensembles finis. $\boxed{3}$
- Rappeler et démontrer le cardinal de $\mathscr{P}(E)$ où E est un ensemble fini. $\boxed{3}$

Notes aux khôlleurs

- $\boxed{1}$ Pas d'exercices de dénombrement cette semaine.
- $\boxed{2}$ En calculant les coefficients du polynôme $(X+1)^{m+n}$ de deux manières différentes.
- $\boxed{3}$ En vérifiant qu'une application est bijective (en posant son application réciproque).