Programme de khôlles n° 8

semaine du 16 au 21 novembre

Mots-clefs

- **Sommes et produits** : le symbole $\sum$, somme des premiers entiers, somme des premiers carrés, somme des premiers cubes, somme des termes d'une suite arithmétique, somme des termes d'une suite géométrique, propriétés des opérations avec le symbole $\sum$ (associativité, linéarité, décalage d'indice, inversion de l'ordre de sommation, somme télescopique, séparation des indices pairs et impairs, inégalité triangulaire), sommes doubles (sur un rectangle ou un triangle d'indices), le symbole $\prod$, factorielle, propriétés des opérations avec le symbole $\prod$ (associativité, multiplicativité, décalage d'indice, inversion de l'ordre du produit, produit télescopique, séparation des indices pairs et impairs), produits doubles (sur un rectangle ou un triangle d'indices), coefficients binomiaux, propriétés des coefficients binomiaux (symétrie, formule du pion, formule de Pascal), triangle de Pascal, formule du binôme de Newton.
- **Applications** : ensembles de départ et d'arrivée, fonctions, applications, images, antécédents, l'ensemble F^E, l'application identité Id_E, applications caractéristiques d'une partie, image directe, ensemble des antécédents, restrictions, prolongements, composition, propriétés de la composition (non commutativité, associativité, élément neutre, inverse, unicité de l'application inverse), injections, surjections, bijections, bijections réciproques, les applications inversibles sont les bijections, composition de bijections, fonctions réelles strictement monotones, image directe d'un intervalle par une fonction continue, théorème de la bijection, courbe représentative d'une bijection réciproque.
- **Dénombrement** : ensembles finis, cardinal, cardinal et bijections, cardinal et injections (principe des tiroirs), cardinal et surjections, cardinal d'une partie, cardinal d'un complémentaire, cardinal d'une union disjointes, formule de Poincaré, cardinal d'un produit cartésien, cardinal d'un ensemble d'applications, cardinal de l'ensemble de parties, p-listes (avec répétition), p-listes sans répétition, permutations, p-combinaisons, dénombrement des anagrammes. $\boxed{1}$

Savoir-faire

- Manipuler et calculer des sommes (linéarité, mdécalage d'indice, inversion de l'ordre de sommation, sommes télescopiques, séparation des indices pairs et impairs) et des produits (multiplicativité, etc.).
- Manipuler et calculer des sommes doubles et des produits doubles (sur un rectangle ou un triangle d'indices).
- Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité d'une application (à l'aide d'une équation ou des définitions).
- Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité d'une fonction réelle d'une variable (à l'aide du tableau des variations et du théorème de la bijection).
- Déterminer la bijection réciproque (à l'aide d'une équation ou en tant qu'application inverse).
- Écrire une application comme une composée de plusieurs applications.
- Reconnaître les modèles combinatoires usuels dans des situations de dénombrement (listes avec répétition, listes sans répétition, permutations, combinaisons). $\boxed{1}$
- Utiliser une bijection pour dénombrer un ensemble.
- Passer au complémentaire pour dénombrer un ensemble.
- Dénombrer des anagrammes.

Exemples de questions de cours

- Rappeler et démontrer l'identité de Vandermonde : $\sum_{\ell=0}^{m+n}\binom{m}{\ell}\binom{n}{k-\ell}=\binom{m+n}{k}$ pour tout $k\in[\![0,m+n]\!]$. $\boxed{2}$
- Rappeler et démontrer la formule de Poincaré : $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$.
- Rappeler et démontrer le cardinal de l'ensemble F^E où E et F sont deux ensembles finis. $\boxed{3}$
- Rappeler et démontrer le cardinal de $\mathscr{P}(E)$ où E est un ensemble fini. $\boxed{3}$
- Rappeler le nombre de p-listes avec répétitions d'un ensemble E fini, le nombre de p-listes sans répétitions de E, le nombre de permutations de E et le nombre de p-combinaisons de E.

Notes aux khôlleurs

- $\boxed{1}$ On se limitera à des exercices simples de dénombrement cette semaine (applications directes du cours).
- $\boxed{2}$ En calculant les coefficients du polynôme $(X+1)^{m+n}$ de deux manières différentes.
- $\boxed{3}$ En vérifiant qu'une application est bijective (en posant son application réciproque).