Programme de khôlles n° 9

semaine du 28 novembre au 3 décembre

Mots-clefs

- **Sommes et produits** : notation $\sum$, somme des premiers entiers, somme des premiers carrés, propriétés des opérations avec le symbole $\sum$ (associativité, linéarité), somme des termes consécutifs d'une progression arithmétique, somme des termes consécutifs d'une progression géométrique, manipulation du symbole $\sum$ (décalage d'indice, télescopage, séparation des indices pairs et impairs, inversion de l'ordre), sommes doubles (sur un rectangle ou un triangle d'indices), notation $\prod$, factorielle, propriétés des opérations avec le symbole $\prod$, manipulation du symbole $\prod$, coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$, propriétés des coefficients binomiaux (symétrie, formule du pion, formule de Pascal), triangle de Pascal, formule du binôme de Newton. $\boxed{1}$
- **Applications** : ensembles de départ et d'arrivée, fonctions, applications, images, antécédents, l'application identité Id_E, applications indicatrices d'une partie, image directe, composition, propriétés de la composition (non commutativité, associativité, élément neutre). $\boxed{2}$

Savoir-faire

- Écrire une fonction Python permettant de calculer une somme ou un produit. $\boxed{3}$
- Reconnaître et utiliser les sommes usuelles ($\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et somme des termes consécutifs d'une progression arithmétique ou géométrique) dans un calcul de somme.
- Manipuler le symbole $\sum$ (associativité, linéarité, décalage d'indice, télescopage, séparation des indices pairs et impairs, inversion de l'ordre). $\boxed{2}$
- Calculer une somme double sur un rectangle ou un triangle d'indices.
- Manipuler des factorielles et des coefficients binomiaux. $\boxed{2}$
- Utiliser la formule du binôme de Newton.
- Calculer l'image directe ou l'ensemble des antécédents d'une partie de $\mathbb{R}$ pour une fonction réelle simple (révision des études de fonction).
- Composer des applications.

Exemples de questions de cours

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j)$.
- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ ou $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.
- Rappeler et démontrer la symétrie des coefficients binomiaux : $\forall (k,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N},\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Rappeler et démontrer la formule de Pascal : $\forall (k,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N},\ \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.
- Rappeler et démontrer la formule du binôme de Newton.
- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ ou $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.
- Montrer que la composition est associative.
- Soit $f : E \to F$. Montrer qu'il existe au plus une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
- Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Simplifier $\max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$ ou $\min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$.

Notes aux khôlleurs

- $\boxed{1}$ L'interprétation combinatoire des coefficients binomiaux n'a pas encore été traitée (en attente du chapitre sur le dénombrement).
- $\boxed{2}$ Les injections, les surjections, les bijections et les bijections réciproques n'ont pas encore été vues.
- $\boxed{3}$ À l'aide d'une boucle `for` (pas de récursivité cette semaine).