Fiche méthodologique n° 6

Sommer et multiplier

1 Utiliser les sommes usuelles

Voici quelques sommes usuelles à connaître par cœur car on les utilise fréquemment. Il faut savoir les repérer très vite dans les calculs de sommes.

1.1 Somme des premiers entiers

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}.$$

Exercice d'application 1
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer la somme des n premiers entiers naturels pairs non nuls, puis celle des n premiers entiers naturels impairs.

Exercice d'application 2
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout couple $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n_1 \leqslant n_2$, montrer que :

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} u_n = (n_2 - n_1 + 1)\frac{u_{n_1} + u_{n_2}}{2}.$$

1.2 Somme des premiers carrés d'entiers

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

Exercice d'application 3
Trouver dix entiers naturels consécutifs dont la somme de leur carré est égale à 39145.

Exercice d'application 4
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme suivante :

$$n(n+1) + (n+1)(n+2) + (n+2)(n+3) + \cdots + (2n-2)(2n-1) + (2n-1)2n.$$

1.3 Somme des termes d'une progression géométrique

Si $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}.$$

Attention. Si $q = 1$ alors on reconnaît la somme d'une progression constante de $n+1$ termes : $\sum_{k=0}^{n} q = (n+1)q$. Si besoin, il faut donc raisonner par disjonction de cas.

Exercice d'application 5
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout couple $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n_1 \leqslant n_2$, montrer que :

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} u_n = u_{n_1}\frac{1-q^{n_2-n_1+1}}{1-q}.$$

Exemple 1
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Solution. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(e^{ik\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k\right).$$

<u>1^{er} cas</u> : $e^{i\theta} = 1$, c'est-à-dire si $\theta \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, alors : $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = n+1$.
<u>2^e cas</u> : $\theta \notin \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ donc $e^{i\theta} \neq 1$, on obtient en factorisant par l'angle moitié :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{2i\sin\left(-(n+1)\theta/2\right)e^{i(n+1)\theta/2}}{2i\sin\left(-\theta/2\right)e^{i\theta/2}}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{\sin\left((n+1)\theta/2\right)}{\sin\left(\theta/2\right)}e^{in\theta/2}\right) = \frac{\sin\left((n+1)\theta/2\right)}{\sin\left(\theta/2\right)}\cos\left(n\theta/2\right).\end{aligned}$$

□

Exercice d'application 6
Résoudre l'équation $\sin(10\theta) + \sin(11\theta) + \sin(12\theta) + \cdots + \sin(99\theta) = 0$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

1.4 Formule du binôme de Newton

On a pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n}.$$

Remarque. En particulier, on a $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ et $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.t

Exercice d'application 7
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} 2^{n+k}$.

Exemple 2
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Solution. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{Re}\left(e^{ik\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{i\theta}\right)^k 1^{n-k}\right) = \mathrm{Re}\left(\left(e^{i\theta}+1\right)^n\right).$$

Puis, on obtient en factorisant par l'angle moitié :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) = \mathrm{Re}\left(\left(2\cos(\theta/2)\, e^{i\theta/2}\right)^n\right) = 2^n \cos^n(\theta/2)\cos(n\theta/2).$$

□

Exercice d'application 8
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

2 Manipuler des sommes

Voici quelques méthodes à connaître pour simplifier les calculs de sommes. Dans cette section, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite numérique quelconque (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$).

2.1 Décalage d'indice

Pour tout couple $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n_1 \leqslant n_2$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} u_{k+p} = \sum_{\ell=n_1+p}^{n_2+p} u_\ell \quad \text{(en posant } \ell = k+p \iff k = \ell - p\text{)}.$$

Attention. Il ne faut pas oublier de changer les bornes de sommation.

Exercice d'application 9
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k+1} 3^k$.

Exercice d'application 10
Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, démontrer l'égalité de Bernoulli :

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

2.2 Inversion de l'ordre de sommation

Pour tout couple $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n_1 \leqslant n_2$, on a :

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} u_k = \sum_{\ell=n_1}^{n_2} u_{n_1+n_2-\ell} \quad \text{(en posant } \ell = n_1+n_2-k \iff k = n_1+n_2-\ell\text{)}.$$

Remarque. En particulier, on retrouve la somme des n premiers entiers en écrivant $S = \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{\ell=1}^{n} (n+1-\ell) = n(n+1) - S$ donc $S = n(n+1)/2$ (astuce de Gauss).
Conseil. L'inversion de l'ordre de sommation permet souvent d'exprimer une somme en fonction d'elle-même afin d'obtenir sa valeur comme solution d'une équation.

Exercice d'application 11
Soit n un entier naturel impair. Calculer $S = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k(n-k)}$.

2.3 Sommes télescopiques

Pour tout couple $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n_1 \leqslant n_2$, on a :

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} (u_{k+1} - u_k) = u_{n_2+1} - u_{n_1}.$$

Conseil. On obtient ce résultat en remarquant que tous les termes se simplifient (ou se «télescopent») sauf le premier $-u_{u_{n_1}}$ et le dernier u_{n_2+1}.
Conseil. De même, on a : $\sum_{k=n_1}^{n_2} (u_k - u_{k+1}) = u_{n_1} - u_{n_2+1}$.

Exemple 3
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^4 - k^4\right]$ de deux manières différentes puis en déduire la formule de la somme des n premiers cubes d'entiers.

Solution. On a d'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^4 - k^4\right] = \sum_{k=1}^{n} \left[4k^3 + 6k^2 + 4k + 1\right] = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1.$$

D'autre part, on a en reconnaissant une somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^4 - k^4\right] = (n+1)^4 - 1.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - 1 - 6\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} - n\right) \\
&= \cdots = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

□

Exercice d'application 12
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \left[(1-q)kq^k - q^{k+1}\right]$ de deux manières différentes puis en déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}\big(1-(n+1)q^n + nq^{n+1}\big).$$

2.4 Séparation des indices pairs et impairs

Pour tout couple $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n_1 \leqslant n_2$, on a :

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} u_k = \sum_{\substack{k=n_1 \\ k \text{ pair}}}^{n_2} u_k + \sum_{\substack{k=n_1 \\ k \text{ impair}}}^{n_2} u_k = \sum_{n_1 \leqslant 2\ell \leqslant n_2} u_{2\ell} + \sum_{n_1 \leqslant 2\ell+1 \leqslant n_2} u_{2\ell+1} = \sum_{\frac{n_1}{2} \leqslant \ell \leqslant \frac{n_2}{2}} u_{2\ell} + \sum_{\frac{n_1-1}{2} \leqslant \ell \leqslant \frac{n_2-1}{2}} u_{2\ell+1}.$$

Exercice d'application 13
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=2n}^{4n} (-1)^k k$.

3 Calculer des sommes doubles

Soit $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ une famille quelconque de nombres (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) où $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

3.1 Sommes doubles sur un rectangle d'indices

Pour calculer la somme de tous les éléments de la famille $(a_{i,j})$, on calcule d'abord une somme en faisant varier un indice et en fixant le deuxième, puis on calcule la somme des résultats obtenus en faisant varier l'indice restant.

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right).$$

Exercice d'application 14
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)$.

Exercice d'application 15
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |i-j|$.

3.2 Sommes doubles sur un triangle d'indices

Dans le cas où $n = p$, on peut calculer de même la somme de tous les éléments de la sous-famille $(a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ en faisant attention aux bornes de la première somme.

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right).$$

Conseil. En pratique, il est plus facile de travailler avec des sommes dont les indices ont la même valeur initiale fixée. Il est donc préférable d'utiliser la deuxième expression.

Exercice d'application 16
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (i/j)$.

Exercice d'application 17
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i}$.

Exercice d'application 18
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $S = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$. Montrer que $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij = 2S - \sum_{k=1}^{n} k^2$ puis en déduire la formule de la somme des n premiers cubes d'entiers.

4 Manipuler des factorielles et des coeff. binomiaux

4.1 Factorielle

La factorielle de $n \in \mathbb{N}$ est définie comme le produit des n premiers entiers non nuls, c'est-à-dire :

$$\boxed{n! = \prod_{k=1}^{n} k}.$$

Exercice d'application 19
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer le produit des n premiers entiers naturels pairs non nuls, puis celui des n premiers entiers naturels impairs.

4.2 Coefficients binomiaux

Le coefficient binomial de $k \in \mathbb{Z}$ parmi $n \in \mathbb{N}$ est défini par :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

Remarque. D'après la formule du binôme de Newton, c'est le coefficient de $a^k b^{n-k}$ dans le développement de l'expression $(a+b)^n$. En particulier, $\binom{n}{k}$ est un entier naturel.
Les coefficients binomiaux vérifient de nombreuses propriétés. Il faut connaître les trois suivantes car on les utilise fréquemment.

— Symétrie :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \quad \boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}.$$

— Formule du pion :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{Z}^\star \times \mathbb{N}^\star, \quad \boxed{\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}}.$$

— Relation de Pascal :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \quad \boxed{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}}.$$

Remarque. La dernière propriété permet de calculer facilement les coefficients binomiaux par récurrence à l'aide du triangle de Pascal.

Exercice d'application 20
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^6(\theta)$.

Exercice d'application 21
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

Exemple 4
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Solution. On a d'après la formule de Moivre :

$$\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = e^{i3\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^3 = \Big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big)^3.$$

Or on a d'après la formule du binôme de Newton et le triangle de Pascal :

$$\begin{aligned}
&\Big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big)^3 \\
=&\binom{3}{0}\left(i\sin(\theta)\right)^3 + \binom{3}{1}\cos(\theta)\left(i\sin(\theta)\right)^2 + \binom{3}{2}\left(\cos(\theta)\right)^2 i\sin(\theta) + \binom{3}{3}\left(\cos(\theta)\right)^3 \\
=&-i\sin^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) + 3i\cos^2(\theta)\sin(\theta) + \cos^3(\theta) \\
=&\Big(-3\cos(\theta)\sin^2(\theta) + \cos^3(\theta)\Big) + i\Big(-\sin^3(\theta) + 3\cos^2(\theta)\sin(\theta)\Big).
\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire, on en déduit que :

$$\cos(3\theta) = -3\cos(\theta)\sin^2(\theta) + \cos^3(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(3\theta) = -\sin^3(\theta) + 3\cos^2(\theta)\sin(\theta).$$

□

Exercice d'application 22
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5\theta)$ et $\sin(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.